



# Opgaven 2008

**Deloitte**



**Hewitt**

**TOPdesk**  
[www.topdesk.nl/werk](http://www.topdesk.nl/werk)

  
FACULTEIT DER NATUURWETENSCHAPPEN,  
WISKUNDE EN INFORMATICA

Universiteit Leiden

  
**TU Delft**



Tweehonderd jaar  
Koninklijke  
Nederlandse  
Akademie van  
Wetenschappen

*Magie van wetenschap*



All you need is LUF!



Centraal Bureau voor de Statistiek

TALENT&PRO



# Master Mathematics

Het Mathematisch Instituut streeft naar excellentie in onderzoek én onderwijs. Als student maak je deel uit van een van de toonaangevende onderzoeksgroepen van het instituut, met persoonlijke en informele begeleiding van de staf. Zo maken studenten en docenten samen onze opleiding, gedreven door hun interesse, expertise en goede contacten in de wetenschappelijke wereld en het bedrijfsleven. Voor een Master Mathematics is Leiden een uitstekende keuze!

De Universiteit Leiden biedt vijf mastertracks aan binnen de Master Mathematics:

Algebra, Geometry and Number Theory

Applied Mathematics

Mathematics and Science Based Business

Mathematics and Education

Mathematics and Communication

Een internationale of interdisciplinaire invulling, bijvoorbeeld met natuurkunde, astronomie of levenswetenschappen, kun je in overleg realiseren.

Meer weten?

[voorlichting@math.leidenuniv.nl](mailto:voorlichting@math.leidenuniv.nl)



Universiteit Leiden

[www.mastersinleiden.nl](http://www.mastersinleiden.nl)

Universiteit Leiden. Universiteit om te ontdekken.

# 1 Dobbelstenen & Legen zonder morsen

*Prof.dr. J.M.A.M. van Neerven, TU Delft*

## **Dobbelstenen**

Kunnen we twee (standaard) dobbelstenen zo manipuleren (i.e. het aantal ogen op de dobbelstenen hoeven niet te worden aangepast), dat de kans dat de som der ogen  $n$  is (met  $n$  tussen 2 en 12) onafhankelijk is van  $n$ ?

## **Legen zonder morsen**

We hebben 3 glazen water, gevuld met  $a$ ,  $b$ , en  $c$  ml water (met  $a, b$  en  $c \in \mathbb{Z}$ ). In ieder van de glazen past  $a + b + c$  ml. Iedere keer gieten we uit een van de glazen zoveel in een ander glas dat de inhoud van het andere glas verdubbelt. Laat zien dat we zo één van de glazen leeg kunnen maken.

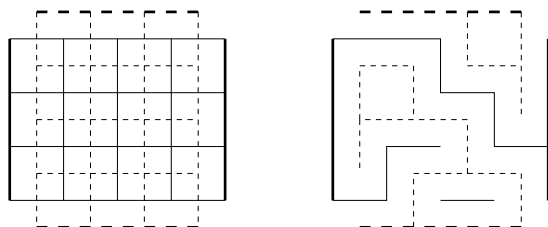
## 2 Percolatieroosters

*Prof.dr. R.W.J. Meester, Vrije Universiteit Amsterdam*

Beschouw het gewone kwadratische rooster, waarin elk tweetal punten in  $\mathbb{Z}^2$  op onderlinge afstand 1 met elkaar verbonden is door een lijnstuk. We gaan nu bepaalde lijnstukken weghalen, op de volgende (toevallige) manier: voor elk lijnstuk in het rooster gooien we een zuivere munt; als kop boven komt laten we het lijnstuk weg, als munt boven komt laten we het lijnstuk staan. De worpen van verschillende lijnstukken worden onafhankelijk van elkaar uitgevoerd. Op deze manier valt het oorspronkelijke rooster uiteen in (samenhangs)componenten; twee punten zitten in dezelfde component als ze na afloop nog steeds door een pad van overgebleven lijnstukken met elkaar zijn verbonden. Het is bekend (en hoeft niet te worden bewezen) dat met kans 1 alle componenten eindig zijn.

Met dit kansproces kunnen we ook een zogenaamd *duaal* rooster construeren. Dit gaat als volgt. In het midden van elk vierkantje van het oorspronkelijke kwadratische rooster zetten we een punt. Twee van deze punten die op afstand 1 van elkaar liggen worden verbonden met een lijnstuk. In feite hebben we nu weer een kwadratisch rooster, alleen verschoven over de vector  $(1/2, 1/2)$ . In het duale rooster laten we een lijnstuk alleen staan als deze een weggenomen lijnstuk uit het oorspronkelijke rooster kruist. Na het weghalen van de diverse lijnstukken zijn er dus nergens meer kruisende lijnstukken. Merk op dat we op het duale rooster dus ook gewoon elk lijnstuk met kans  $1/2$  laten staan en met kans  $1/2$  weghalen, onafhankelijk van andere lijnstukken van het duale rooster.

Bekijk nu Figuur 1. In die figuur zie je rechts een realisatie binnen een 4 bij 3 rechthoek, samen met de bijbehorende realisatie van het duale rooster.



Figuur 1: Het kwadratisch rooster en het duale rooster

- a) Bewijs, aan de hand van de figuur, dat de kans dat binnen een  $n + 1$  bij  $n$  rechthoek een verbinding bestaat van links naar rechts gelijk is aan  $1/2$ , onafhankelijk van  $n$ . Gebruik hierbij de relatie tussen het oorspronkelijke en het duale rooster.
- b) Gebruik nu eenzelfde soort argument om gegeven  $\mathbb{Z}^2$  de kans uit te rekenen dat  $(0, 0)$  en  $(1, 0)$  in dezelfde component zitten.

### 3 Eén van de twaalf!

*Prof.dr.ir. H.C.A. van Tilborg, TU Eindhoven*

Er zijn 12 ballen, zeg  $B_1, B_2, \dots, B_{12}$ , die er identiek uit zien. Ze hebben ook allemaal hetzelfde gewicht, op misschien één na, die een afwijkend gewicht kan hebben. Met een balans willen we er in 3 wegingen achter komen of er een bal een afwijkend gewicht heeft en, zo ja, welke bal dat dan wel is en of de bal lichter of zwaarder is.

We willen een weegschema  $H_{3,12}$  dat de vorm heeft van een  $3 \times 12$ -matrix over  $\{-1, 0, 1\}$ . De interpretatie is

$$h_{i,j} = \begin{cases} +1 & B_j, \text{ ligt tijdens de weging } i \text{ op de rechterschaal,} \\ 0 & B_j, \text{ wordt gedurende weging } i \text{ niet gebruikt,} \\ -1 & B_j, \text{ ligt tijdens de weging } i \text{ op de linkerschaal} \end{cases}$$

waarbij  $i \in \{1, 2, 3\}$  en  $1 \leq j \leq 12$ .

- Hoeveel enen bevat een rij van  $H_{3,12}$ ? En hoeveel nullen?
- Wat kun je van elk tweetal kolommen van  $H_{3,12}$  zeggen?
- Geef zo'n  $H_{3,12}$ .



## Trading On The Next Level

**Saen Options** is a mid-size independent trading company headquartered in the centre of Amsterdam. We trade options and equities on most of the major financial markets in the world. Our employees have academic backgrounds in a variety of fields and are trained to further specialize in trading, research and/or software engineering. Within Saen we highly value personal development, which is based on the employee's unique combination of knowledge, capabilities and interests. Consider an environment where your decisions have direct impact on financial markets and where drive, discipline, creativity, teamwork and perseverance are recognized, appreciated and rewarded.



### Become a Trainee Trader

You will receive an intensive training in option theory. Within a couple of weeks you have to be able to put the theory into practice. Once you start trading you will be coached and monitored closely. It is important that you are able to focus on the markets but also perform research in order to maximize your profits and to discover new trading opportunities.

**Is this your Profile** \_Strong academic background (preferably quantitative, economics or computer science) \_Highly interest in financial markets \_Good analytical skills \_Drive and capacity to quickly master the option theory \_Interest in working in a multidisciplinary environment \_Programming skills

**and are these your Characteristics** \_Good communicator \_Result driven \_Urge to be in control \_Self-confidence in taking decisions \_Quick learner \_Winner's mentality

**then** please send your resume to Sabine Vioen at [career@saen.nl](mailto:career@saen.nl)

Check our website [www.saen.nl](http://www.saen.nl) for more information about our company.

[www.saen.nl](http://www.saen.nl)

## 4 Hollandsche Glorie

*Prof.dr. J.P. Hogendijk, Universiteit Utrecht & Universiteit Leiden*

### Ingeschreven cirkel

*Uit: Beginselen der Meetkunst, ontworpen naar haren tegenwoordigen staat van vorderingen; door Jacob de Gelder, Hoogleeraar, te Leyden. Derde, geheel omgewerkte en veel vermeerderde druk. 'S Gravenhage en Amsterdam, 1828.*

Bijgevoegde stelling:

*439. Indien  $R$  den straal eens cirkels verbeeldt, die om eenigen driehoek  $ABC$  beschreven,  $r$  de straal eens cirkels, die in denzelven beschreven is;  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  de stralen des cirkels, die de zijden des driehoeks, naar buiten aanraken; dan is de afstand van de middelpunten der in- en omgeschreven cirkels  $R^2 - Rr$ ; en de afstand van de middelpunten des cirkels, die  $R$  en  $\alpha$  tot stralen hebben, gelijk aan  $R^2 + R\alpha$ .*

Het betoog van deze stelling te zoeken, zij aan de vlijtige oefening van den Lezer overgelaten, die hetzelfde uit de voorgaande stellingen ligtelijk zal kunnen afleiden.

In het volgende noem ik (=Jan Hogendijk)  $d$  de afstand tussen het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek tot het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Los de volgende vragen op:

1. Laat zien dat de formule  $d = R^2 - Rr$  van Jacob de Gelder fout is.
2. Zou een soortgelijke formule te vinden zijn? Zo ja, probeer een vermoeden op te stellen.
3. Als je een vermoeden opgesteld hebt, probeer dat te bewijzen; of probeer te laten zien dat  $d$  niet een functie kan zijn van  $R$  en  $r$ .
4. Behandel op soortgelijke manier De Gelder's formule voor  $R$  en  $\alpha$ .



## 5 Geordende verzamelingen uit $\mathbb{N}$

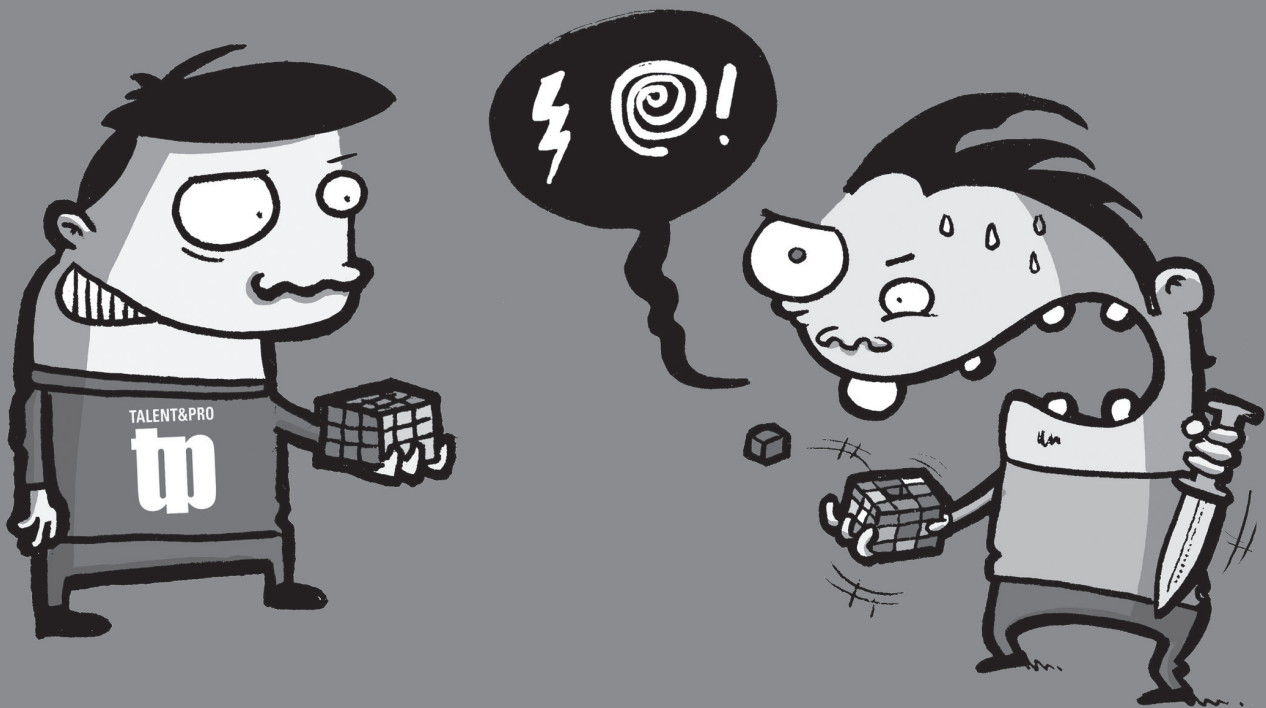
*dr. K.P. Hart, TU Delft & Universiteit Leiden*

- a) Toon aan: er bestaat een familie deelverzamelingen,  $\mathcal{A}$ , van  $\mathbb{N}$ , z.d.d.  $\mathcal{A}$  lineair geordend is door  $\subset$  (d.w.z. voor alle  $A, B \in \mathcal{A}$  geldt  $A \subset B$  of  $B \subset A$ ), en  $\mathcal{A}$  gelijkmachtig is met  $\mathbb{R}$ . (We noemen twee verzamelingen *gelijkmachtig* als er een bijectie tussen de verzamelingen bestaat.)
  
- b) Twee oneindige deelverzamelingen  $A$  en  $B$  van  $\mathbb{N}$  heten *bijna disjunct* als  $A \cap B$  eindig is. Een familie  $\mathcal{A}$  van deelverzamelingen van  $\mathbb{N}$  heet bijna disjunct als elk tweetal verzamelingen in  $\mathcal{A}$  bijna disjunct is. Toon aan: als  $\mathcal{A}$  een aftelbare bijna disjuncte familie (van oneindige deelverzamelingen van  $\mathbb{N}$ ) is, dan is er een oneindige deelverzameling  $A$  van  $\mathbb{N}$  zó dat  $\mathcal{A} \cup \{A\}$  ook een bijna disjuncte familie is.
  
- c) Toon vervolgens het volgende aan: er is een bijna disjuncte familie (van oneindige deelverzamelingen van  $\mathbb{N}$ ) die gelijkmachtig is met  $\mathbb{R}$ .

## 6 $2 \pmod n$

*Prof.dr. H.W. Lenstra, Universiteit Leiden*

Bestaat er een positief geheel getal  $n$  dat deelbaar is door 103 met de eigenschap  $2^{2^{n+1}} \equiv 2 \pmod n$ ? Bewijs de correctheid van het gegeven antwoord.



## Talent om te kiezen

E-mail: [recruitment@talent-pro.com](mailto:recruitment@talent-pro.com)

Tel: 033-7999022

Web: [www.talentomtekiezen.nl](http://www.talentomtekiezen.nl)

TALENT&PRO

tp

**Applied Mathematics**  
MSc Programme

[www.masteryourfuture.nl](http://www.masteryourfuture.nl)



Delft University of Technology

## 7 Een stabiele numerieke methode voor stromingsproblemen

*Prof.dr.ir. B. Koren, CWI & Universiteit Leiden*

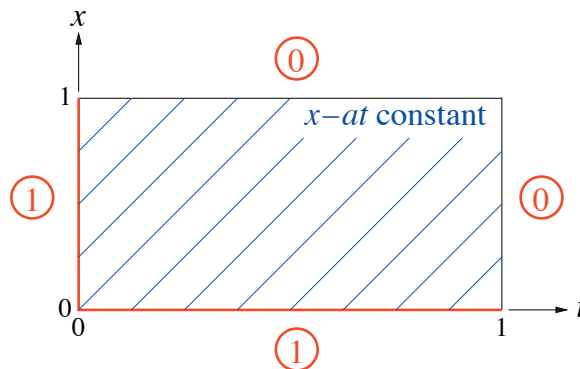
### Modelprobleem en rekenrooster

Beschouw de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{met } a \text{ constant.} \quad (1)$$

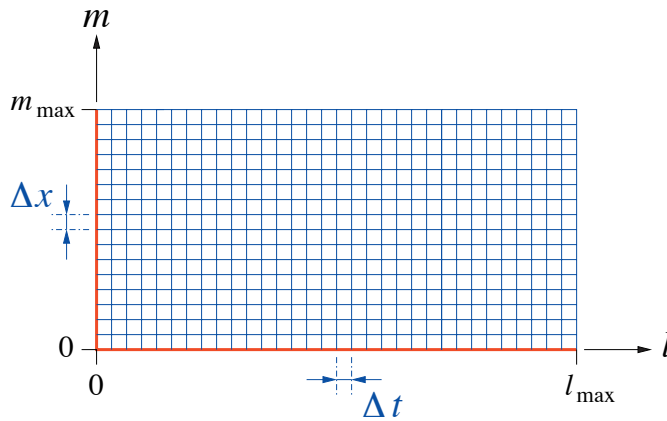
Vergelijking (1) is een model van complexere partiële differentiaalvergelijkingen die transportverschijnselen beschrijven, verschijnselen variërend van lucht- en waterstromingen tot autoverkeersstromen. De onafhankelijke variabelen  $x$  en  $t$  kunnen als ruimtecoördinaat respectievelijk tijd worden opgevat,  $a$  als de stroomsnelheid.

De oplossing van de modelvergelijking is eenvoudig:  $u$  is constant langs de lijnen  $x - at = \text{constant}$ , de zogenaamde karakteristieke lijnen. In Figuur 2 zijn deze lijnen weergegeven, voor het geval dat  $a$  positief is. In Figuur 2 zijn ook – in rood – aangegeven, op elk van de vier randen van het rekengebied, de aantallen randvoorwaarden die nodig zijn om het probleem op te lossen.



Figuur 2: Karakteristieke lijnen en aantallen benodigde randvoorwaarden, voor modelvergelijking (1) met  $a > 0$ .

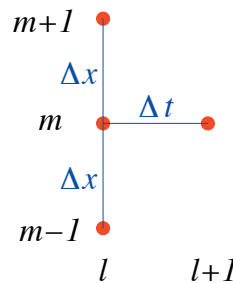
We gebruiken de voorkennis over de exacte oplossing niet, maar introduceren – ter bestudering van numerieke oplossingsmethoden – het equidistante rekenrooster gegeven in Figuur 3, met roosterlijnen evenwijdig aan de  $x$ - en  $t$ -as. We willen de oplossing nu alleen uitrekenen op de snijpunten van roosterlijnen, de roosterpunten. De roosterpunten nummeren we als  $l = 0, 1, 2, \dots, l_{\max}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, m_{\max}$  (Figuur 3). De numerieke oplossing in roosterpunt  $(l, m)$  noteren we als  $u_{l,m}$ .



Figuur 3: Rekenrooster.

### Eindige-differentievergelijking

In alle roosterpunten  $(l, m)$ ,  $l < l_{\max}$  vervangen we nu de tijdsafgeleide  $\frac{\partial u}{\partial t}$  door de voorwaartse eindige differentie  $\frac{u_{l+1,m} - u_{l,m}}{\Delta t}$ , en de ruimtelijke afgeleide  $\frac{\partial u}{\partial x}$  door de centrale eindige differentie  $\frac{u_{l,m+1} - u_{l,m-1}}{2\Delta x}$ . De door beide differenties gebruikte roosterpunten zijn weergegeven in Figuur 4. Het diagram in Figuur 4 wordt het stencil van de beschouwde eindige-differentie discretisatie genoemd.



Figuur 4: Stencil van voorwaarts-in-tijd, centraal-in-ruimte, eindige-differentie discretisatie.

Merk op dat de hier beschouwde eindige-differentie benadering van  $\frac{\partial u}{\partial x}$  niet zonder meer toepasbaar is voor de roosterpunten met  $m = m_{\max}$ ; de centrale eindige-differentieformule vraagt daar om oplossingen in roosterpunten  $m = m_{\max} + 1$ , maar deze laatste punten bestaan niet. Ter vermindering van dit implementatieprobleempje veronderstellen we hier dat het randwaardenprobleem periodiek is in  $x$ -richting; de randen  $x = 0$  en  $x = x_{\max}$  zijn ‘aan elkaar vastgeplakt’. In alle roosterpunten met  $l < l_{\max}$  kan nu worden beschouwd de eindige-differentievergelijking

$$\frac{u_{l+1,m} - u_{l,m}}{\Delta t} + a \frac{u_{l,m+1} - u_{l,m-1}}{2\Delta x} = 0. \quad (2)$$

### Vervangende vergelijking

Om te verifiëren of vergelijking (2) gelijk is aan modelvergelijking (1) in de limiet  $\Delta t \downarrow 0$  en  $\Delta x \downarrow 0$  (de consistentiecontrole), vervangen we de lokale discrete oplossingen  $u_{l+1,m}$ ,  $u_{l,m+1}$  en  $u_{l,m-1}$  in (2) door Taylor-reeksontwikkelingen rond  $u_{l,m}$ : Substitutie van de afgebroken Taylor-expansies in (2), de indices  $l$  en  $m$  weglatend (zij zijn nu de enige indices en daarom betekenisloos), levert:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \text{h.o.t.} \quad (3)$$

Dit is weer een partiële differentiaalvergelijking, een vergelijking in de continue ruimte. De Taylor-reeksontwikkelingen hebben ons teruggebracht van de discrete ruimte in de continue ruimte. Vergelijking (3) wordt de vervangende vergelijking behorende bij (2) genoemd. Vervangende vergelijking (3) laat zien dat eindige-differentievergelijking (2) consistent is; voor  $\Delta t \downarrow 0$  en  $\Delta x \downarrow 0$  convergeert (3) naar (1). Vergelijking (3) laat ook zien welke partiële differentiaalvergelijking eigenlijk wordt opgelost voor kleine maar eindige  $\Delta t$  en  $\Delta x$ .

### Stabiliteit

De berekening van de oplossing in alle roosterpunten is rechttoe-rechtaan als wordt gestart vanaf de beginrand  $l = 0$ . Eindige-differentievergelijking (2) heeft slechts één roosterpuntoplossing op het nieuwe tijdsniveau  $l + 1$ :  $u_{l+1,m}$ . Dus  $u_{l+1,m}$  kan direct (expliciet) worden berekend met (2). Indien geen instabiliteit optreedt, dan kan de numerieke oplossing voor alle roosterpunten worden uitgerekend door in de tijd vooruitstappend, de lokale oplossing  $u_{l+1,m}$  op het nieuwe tijdsniveau te berekenen uit lokale oplossingen op het actuele tijdsniveau  $l$ :

$$u_{l+1,m} = u_{l,m} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{l,m+1} - u_{l,m-1}). \quad (4)$$

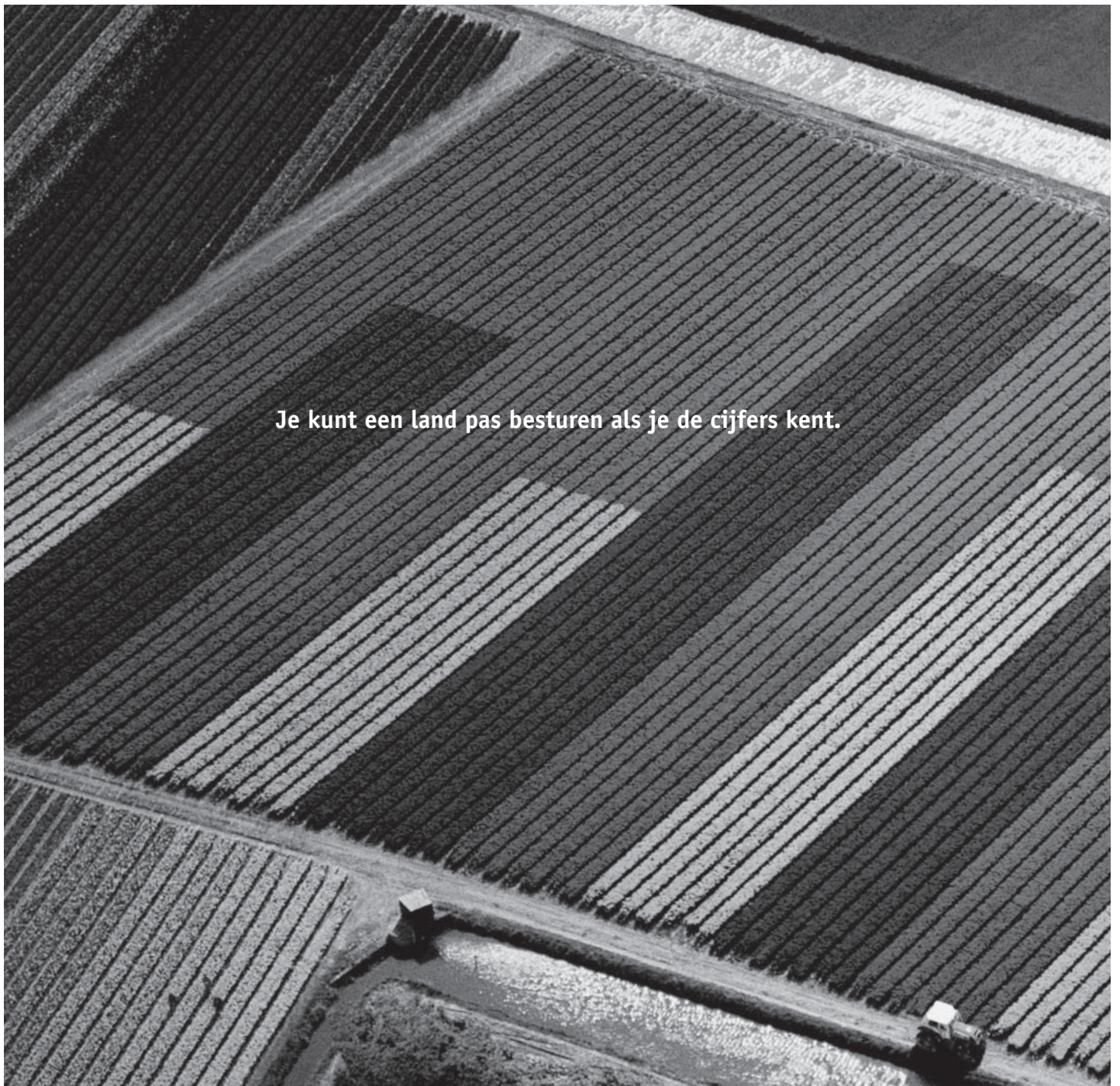
Het blijkt dat dit helaas niet werkt. Vergelijking (2) is instabiel! De instabiliteit kan worden aangetoond met de volgende analyse.

Beschouw als oplossing van modelvergelijking (1) de continue Fourier-vorm

$$u(x, t) = U e^{\sigma t} e^{i\omega x}, \quad (5)$$

met  $i$  de imaginaire eenheid, met  $U$  en  $\omega$  gegeven reële constanten, en met  $\sigma$  als onbekende. Door te nemen  $t = l\Delta t$  and  $x = m\Delta x$  in (5), krijgen we de discrete Fourier-vorm. We definiëren nu de versterkingsfactor  $\rho \equiv e^{\sigma\Delta t}$  en  $k \equiv \omega\Delta x$ . De stabiliteitseis waaraan de numerieke methode moet voldoen is

$$|\rho| \leq 1. \quad (6)$$



Je kunt een land pas besturen als je de cijfers kent.

Hoe hard groeit de Nederlandse economie? Hoe ontwikkelt de inflatie zich? In welk tempo neemt de werkloosheid af? Hoe hard groeit onze bevolking nog? Wat zijn de effecten van het milieubeleid? Hoe groot is het aantal verkeersslachtoffers in Nederland? In Nederland worden elk jaar duizenden beslissingen genomen op basis van cijfers die het CBS levert. Bij het opstellen van de Rijksbegroting bijvoorbeeld, zijn ze van groot belang. Belangrijke beslissingen vereisen een goed

fundament. Vandaar dat de cijfers die de CBS'ers met elkaar verzamelen, analyseren en publiceren betrouwbaar moeten zijn. En dat gaat niet vanzelf. Heb je een opleiding op HBO- of WO-niveau en wil je helpen Nederland cijfermatig in kaart te brengen?

Kijk voor de actuele vacatures op [www.werkenbijhetcbs.nl](http://www.werkenbijhetcbs.nl). Je vindt daar ook alles over de gunstige arbeidsvoorwaarden en de vele loopbaanmogelijkheden.

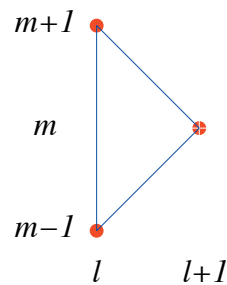




In te zien is dat eindige-differentiemethode (2) instabiel is en daarom onbruikbaar.

### Opgaven

We gaan op zoek naar een consistente en stabiele eindige-differentiemethode voor ons modelprobleem. We beschouwen hiertoe hetzelfde rekenrooster (het rekenrooster gegeven in Figuur 3), maar gaan uit van het drie-puntsstencil gegeven in Figuur 5.



Figuur 5: Drie-puntsstencil.

Een opmerkelijke eigenschap van dit stencil in vergelijking met het vierpuntsstencil in Figuur 4 is dat het roosterpunt  $(l, m)$  – het roosterpunt waarin de vergelijking is gedefinieerd – niet gebruikt wordt.

Hier volgen de opgaven:

- Leid de eindige-differentievergelijking behorende bij dit stencil af.
- Leid de bijbehorende vervangende vergelijking af en interpreteer deze.
- Analyseer de stabiliteit van deze eindige-differentiemethode.



## Ken je TOPdesk al?

Onthoud deze werkgever voor als je straks een leuke baan of afstudeerplek zoekt! Je kunt er jezelf zijn. Je krijgt de ruimte om je te ontwikkelen, je ondernemerschap te tonen en je profiteert van de voordelen van een jonge, professionele cultuur.

Voor de tweede achtereenvolgende keer is **TOPdesk verkozen tot een van de leukste werkgevers van Nederland**. In het Intermediair-onderzoek naar de meest tevreden werknemers behaalde TOPdesk, van 71 werkgevers, de derde plaats. Wij zijn trots op onze derde plek! En nog trotser op de dikke 9 die we scoren op 'Werksfeer'. Hieruit mogen we concluderen dat we écht de leukste werkgever van Nederland zijn!!

## Welke kansen wij je bieden?

Check voor de start van je carrière onze vacatures. Op onze site vind je ook goede én leuke voorbeelden van afstudeeropdrachten, mocht je nog inspiratie nodig hebben.

Neem voor meer informatie contact op met Anne of Rik van de afdeling P&O. Of stuur je sollicitatiebrief direct naar **[vacatures@topdesk.nl](mailto:vacatures@topdesk.nl)**.

TOPdesk  
Martinus Nijhofflaan 2, 2624 ES Delft  
015 2 700 900  
[vacatures@topdesk.nl](mailto:vacatures@topdesk.nl)

**TOPdesk**  
[www.topdesk.nl/werk](http://www.topdesk.nl/werk)

## 8 Polynomen en niet-lineaire recursie

*Prof.dr. W. v. Assche, Katholieke Universiteit Leuven*

### Polynomen

Stel dat  $a, b \in \mathbb{R}$  met  $a \neq b$  en definieer

$$P(x) = e^{x(x-b)} \left( \frac{d^n}{dx^n} e^{(b-a)x} \left( \frac{d^m}{dx^m} e^{x(a-x)} \right) \right).$$

Toon aan dat  $P$  een polynoom is en bepaal de graad van  $P$ . Voor welke waarden van  $k$  en  $\ell$  geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) x^k e^{x(a-x)} dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) x^\ell e^{x(b-x)} dx = 0 ?$$

### Niet Lineaire recursie

Neem de niet-lineaire recursierelatie

$$(1 - a_n^2)(a_{n+1} + a_{n-1}) = na_n.$$

Toon aan dat er een unieke oplossing bestaat met  $a_0 = 1$  en  $0 < a_n < 1$  voor elke  $n \geq 1$ .

## 9 Weyl identiteit

*Dr. F. H. J. Redig, Universiteit Leiden*

Zij  $A, B$   $n \times n$  matrices met reëel-waardige elementen. De commutator van  $A$  en  $B$  is gedefinieerd als volgt

$$[A, B] = AB - BA.$$

Verder definiëren we de exponentiële van een matrix via de Taylorreeks

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

a) Toon aan dat als  $A, B$  commuteren, dat dan

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

b) Bedoeling is nu een veralgemening te vinden van deze formule in het geval  $A$  en  $B$  niet commuteren. We definiëren, voor  $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = e^{-t(A+B)} e^{tA} e^{tB}$$

en

$$h(t) = e^{tA} B e^{-tA}.$$

Toon aan dat  $g'(t) = e^{-t(A+B)} [e^{tA}, B] e^{tB}$ , en dat  $g(0) = I$ , met  $I$  de eenheidsmatrix.

c) Toon aan dat

$$h'(t) = [A, h(t)] = e^{tA} [A, B] e^{-tA}.$$

d) Stel nu dat  $A$  commuteert met  $[A, B]$ , i.e.,  $[A, [A, B]] = 0$ . Toon aan dat  $A$  dan commuteert met  $h'(t)$ , en dat  $h''(t) = 0$ . Besluit daaruit dat, in dit geval

$$[e^{tA}, B] = t[A, B] e^{tA}.$$

e) Stel nu dat  $A$  en  $B$  beide commuteren met  $[A, B]$ . Toon aan dat  $g'(t) = t[A, B]g(t)$ . Leid hieruit af dat  $g(t) = e^{t^2[A, B]/2}$

f) Besluit nu dat als  $A$  en  $B$  commuteren met  $[A, B]$ , dat dan

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A, B]}$$



## BIJ DE UVA MAAK JE WERK VAN JE MASTER

Kiezen voor een bètamaster aan de Universiteit van Amsterdam betekent kiezen voor een inspirerende master. Want de onderzoeksresultaten van vandaag verwerken UvA-wetenschappers in de colleges van morgen.

### Masters in Mathematics

- Mathematics
- Mathematical Physics
- Stochastics and Financial Mathematics
- Mathematics and Science Education

De masters binnen wiskunde aan de UvA duren twee jaar en zijn Engelstalig. De masters Mathematics en Stochastics and Financial Mathematics worden verzorgd in samenwerking met de Vrije Universiteit Amsterdam.

### Onderwijs door toponderzoekers

Als je instroomt in een master binnen wiskunde aan de UvA dan kun je college krijgen van toponderzoekers als Spinozaprijswinnaars prof. dr. Robbert Dijkgraaf (Mathematische fysica) en prof. dr. Lex Schrijver (Discrete

wiskunde en optimalisering). Bovendien verzorgt internationaal toponderzoeker prof. dr. Nicolai Reshetikhin van de University of California in Berkeley sinds voorjaar 2008 een college binnen de master Mathematical Physics.

### Wiskundig onderzoek aan de UvA

Het wiskundig onderzoek aan de UvA vindt plaats binnen het Korteweg-de Vries Instituut voor wiskunde (KdVI). Het onderzoek strekt zich uit van zuivere wiskunde, inclusief logica, tot toegepaste wiskunde, statistiek en financiële wiskunde. Binnen het Instituut voor Bedrijfs- en Industriële Statistiek (IBIS) dat opereert binnen het bedrijfsleven, wordt onderzoek gedaan in de industriële statistiek. Tevens is de UvA de enige algemene universiteit in Nederland met een leerstoel Numerieke wiskunde.



**Prof. dr. Robbert Dijkgraaf**  
Hoogleraar Mathematische fysica aan de UvA

*‘Onze bètafaculteit is the place to be. Je krijgt geen saaie logaritmesommetjes, maar leert al snel om na te denken over de lekkere hapjes in de wis- en natuurkunde en komt in aanraking met het nieuwste onderzoek. Het zijn immers de twintigers die in de bètawetenschappen voor de grote doorbraken zorgen.’*

### Voor meer informatie:

[www.studeren.uva.nl/science-masters](http://www.studeren.uva.nl/science-masters)  
[www.science.uva.nl/math](http://www.science.uva.nl/math)

## 10 Gesloten in $\mathbb{C}$

*Prof.dr. J. Top, Rijksuniversiteit Groningen*

Neem  $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  willekeurig,  $n := 2^{2a+1} - 1 \in \mathbb{Z}$  en  $\zeta := e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$ .

De verzameling  $S \subset \mathbb{C}$  definiëren we als de kleinste verzameling met de twee eigenschappen

1. als  $s \in S$ , dan ook  $s^2 \in S$ ;
2. voor elke gehele  $k$  met  $1 \leq k \leq 2^a$  geldt  $\zeta^k \in S$ .

Toon aan, dat  $\overline{S}$  en  $S$  een lege doorsnede hebben (met  $\overline{S}$  wordt de verzameling complex geconjugeerden van de elementen in  $S$  bedoeld).

talent

# Deloitte zoekt

Deloitte zoekt toptalent. Altijd. Want toptalent levert topprestaties. En dat is precies wat Deloitte wil: de beste zijn. In dienstverlening. En in knowhow. Toptalent zoeken we dus ook voor Consulting, Enterprise Risk Services en Financial Advisory Services. We hebben altijd ruimte voor ambitieuze starters. Nieuwsgierige studenten die grenzen kunnen verleggen en beschikken over goede analytische vaardigheden. Gedreven om de top te bereiken. Erop gebrand het beste uit henzelf te halen. Cliëntgerichte zelfstandige werkers, maar tegelijkertijd teamplayers. Toppers dus. Ben jij dat? Breng dan jouw talent in de praktijk!

## Deloitte Consulting

Deloitte Consulting adviseert de top van het (inter-)nationale bedrijfsleven en veel (semi-)overheidsorganisaties over complexe strategische en organisatorische vraagstukken. We bieden waar mogelijk een totaaloplossing: van strategie tot en met implementatie. Deloitte Consulting adviseert op het gebied van Corporate Strategy, Financial Management en Change Management. Maar ook over kostenreductietrajecten, de wereldwijde uitrol van SAP- en Oracle-applicaties, CRM-oplossingen, het ontwikkelen van ICT maatwerkoplossingen en IT Strategie. Daarnaast geven onze consultants strategisch marketingadvies en ondersteunen zij organisaties bij Supply Chain Management.

## Deloitte Enterprise Risk Services

Deloitte Enterprise Risk Services (ERS) adviseert en ondersteunt multinationals, nationale bedrijven, de overheid en non-profitinstellingen bij het signaleren, analyseren, beoordelen en managen van risico's. Deze risico's variëren van boardroom risico's op strategisch niveau tot technische risico's op netwerkniveau. De betrouwbaarheid van bedrijfsprocessen, informatie en technologie is het werkerrein van ERS. Werkzaamheden lopen uiteen van vraagstukken op het gebied Corporate Governance, internal/operational auditing, IT-auditing, proces- en systeemrisico's en data-analyse tot complexe technische vraagstukken over informatiebeveiliging, infrastructuurbeveiliging, ethical hacking en identitymanagement. Tevens kan je bij ons als softwarespecialist werken aan het Deloitte INVision platform.

## Deloitte Financial Advisory Services

Deloitte Financial Advisory Services (FAS) houdt zich onder andere bezig met complexe financiële transacties, kapitaalmarktvragestukken, vastgoed en risicobeheersing. Financiële specialisten op uiteenlopende terreinen bundelen hier hun kennis en ervaring in de volgende Service Lines: Transaction Advisory (Corporate Finance & Transaction Services), Capital Markets (Treasury, Energy & Quantitative Modelling), Actuarial & Employee Benefits en Real Estate Advisory (Strategy Advisory, Project & Portfolio Advisory en Area Development & PPP). De werkzaamheden lopen uiteen van financieel advies bij grote bedrijfsovernames tot het realiseren van financiering voor grote nieuwbouwprojecten. Maar ook IFRS, financial modelling en waardebeoordeling van contracten en pensioenen komen aanbod.

## Interesse?

Ben jij het toptalent dat Deloitte zoekt?

Kijk dan op [www.treasuringtalent.com](http://www.treasuringtalent.com) of neem contact op met Olivier Wilmlink (Consulting) op 020 - 454 71 31, Lisette van Alphen (Enterprise Risk Services) op 020 - 454 74 64 of Stefanie Ruys (Financial Advisory Services) op 020 - 582 55 82.

# Deloitte.

Accountants • Belastingadviseurs • Consultants • Financieel Adviseurs •

TreasuringTalent.com



Kies je eigen weg

Hewitt

“There are no speed limits on the road to excellence.”

David W. Johnson

Hewitt Associates is een wereldwijd opererende HRM-Consulting en Outsourcing-organisatie met ongeveer 23.000 mensen in bijna veertig landen. In Nederland (350 collega's) helpen wij onze klanten met actuariële advies, pensioenuitvoering en complete HRM-consultancy. Wij doen ons werk met passie, wat bij ons staat voor intellectuele uitdagingen, optimale kwaliteit en interessante klanten. Maar ook voor plezier in je werk, groei en een eigen koers.

## Wiskids en bèta's op zoek naar een werkstudentschap

Wij zijn een bedrijf waarvan je mag verwachten dat het weet wat mensen beweegt in hun werk, en wat ze in een carrière zoeken. Daarom hier geen verhaal over targets en hoe wij telkens weer weten die te bereiken. De weg erheen vinden wij veel belangrijker, omdat die het beste in mensen boven brengt. Bij Hewitt is dat een pad dat je in hoge mate zelf uitstippelt. En waar elke bestemming een nieuw begin is.

**Wil jij al werkend verder leren?** Hewitt is op zoek naar wiskids en bèta's, die tijdens hun studie 1 à 2 dagen per week praktijkervaring willen opdoen in het actuariële vakgebied. Bij ons vind je daarom ook de ruimte voor initiatief, een informele cultuur, continue uitdagingen en mogelijkheden om werken en studeren te combineren. Ook zijn er mogelijkheden om na je bachelor bij Hewitt in dienst te komen. Bij Hewitt krijg je de mogelijkheid om door te studeren tot actuaaris. Niet alleen wordt deze studie volledig vergoed, ook krijg je jaarlijks extra studieverlof en kun je de studie in je eigen tempo doen!

**Wij willen graag in jou investeren,** zodat je een goed beeld kan krijgen van het beroep actuaaris en de organisatie. Bij ons mag je - sterker nog - moét je jezelf zijn, want pas dan haal je het beste uit jezelf en ben je in staat om je eigen koers te varen wanneer je bent afgestudeerd.

**Standplaats** Hewitt is gevestigd in Amsterdam, Eindhoven en Rotterdam. Op ieder kantoor hebben we op dit moment plaats voor 2 werkstudenten. Informeer voor het aantal open plaatsen op de diverse kantoren bij Laura Goeree (020 660 94 84). De sollicitatieprocedure loopt gedurende het gehele jaar door.

**Interesse?** Ben jij een vierdejaars student Wiskunde, Econometrie of Actuariële Wetenschappen en wil je naast studeren werkervaring opdoen binnen de actuariële dienstverlening, dan willen we je graag uitnodigen voor een kennismakingsgesprek. We kunnen dan de combinatie van werken en studeren verder met je bespreken. Stuur je curriculum vitae en brief met daarin een korte omschrijving van jezelf naar Hewitt Associates B.V., Afdeling Human Resources, t.a.v. Laura Goeree, Postbus 12079, 1100 AB Amsterdam, of mail deze naar [nlpz@hewitt.com](mailto:nlpz@hewitt.com).

Meer informatie over diverse functies en over werken bij Hewitt vind je op [www.hewitt.nl](http://www.hewitt.nl)