Limo5

Antwoorden

AllOptions

FLOW TRADERS

TALENT&PRO

Universiteit Utrecht

vrije Universiteit amsterdam

Universiteit van Amsterdam

Universiteit Leiden

Universiteit Twente
de ondernemende universiteit

TU Delft

Radboud Universiteit Nijmegen

Thomas Stieltjes Institute for Mathematics

Mathematical Research Institute
MRI

Tweehonderd jaar Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen
Magie van wetenschap

KWG
Koninklijk Wiskundig Genootschap

Utrechts Universiteitsfonds Alumnibureau

1. Kaarten schudden

J.M.A.M. van Neerven, Technische Universiteit Delft

Ja. Om dit te zien houden we bij welke kaarten op de 'juiste' positie liggen. De kaart met nummer M *ligt op de juiste positie* als hij op positie M ligt, van boven af gerekend. We moeten aantonen dat op zeker moment de kaart met nummer 1 op de juiste positie komt te liggen. In het onderstaande lijstje kijken we wat er gebeurt in het bovenstaande voorbeeld. Kaarten die op de juiste positie zijn onderstreept; in de kolom rechts staan nog een keer de kaarten die op de juiste positie liggen:

$$\begin{array}{ll}
4-6-9-5-8-1-\underline{7}-10-3-2 & 7 \\
5-9-6-\underline{4}-8-1-\underline{7}-10-3-2 & 7-4 \\
8-4-6-9-\underline{5}-1-\underline{7}-10-3-2 & 7-5 \\
10-7-1-5-9-\underline{6}-4-\underline{8}-3-2 & 8-6 \\
2-3-8-\underline{4}-6-9-5-1-7-\underline{10} & 10-4 \\
3-\underline{2}-8-\underline{4}-6-9-5-1-7-\underline{10} & 10-4-2 \\
8-2-\underline{3}-\underline{4}-6-9-5-1-7-\underline{10} & 10-4-3 \\
\underline{1}-5-9-6-4-3-2-\underline{8}-7-\underline{10} & 10-8-1
\end{array}$$

Wat opvalt is dat de rechter kolom *strikt monotoon stijgend* is ten aanzien van de lexicografische ordening! In de lexicografische ordening geldt voor rijtjes $\{a_i\}$ en $\{b_i\}$ dat $\{a_i\} > \{b_i\}$ als voor het eerste element met $a_i \neq b_i$ geldt dat $a_i > b_i$ (zoals in een woordenboek dus). Het is niet moeilijk in te zien dat we altijd een strikt monotoon stijgend rijtje krijgen: als op zeker moment M de bovenste kaart is. Alle m kaarten die al goed liggen en nummer $> M$ hebben blijven dan bij de volgende aflegging op hun plaats. Als vóór het afleggen het rechterrijtje van kaarten die op hun plaats liggen er uitziet als

$$X_1 - \cdots - X_m - x_1 - \cdots - x_k.$$

waarbij de x staan voor de overige (zeg: k) kaarten die al goed liggen, dan krijgen we na afleggen het rijtje

$$X_1 - \cdots - X_m - M - x_1' - \cdots - x_l'.$$

In de aangegeven lexicografische ordening is dit rijtje inderdaad strikt groter. Wegens het strikt stijgend en het eindig zijn van het aantal mogelijkheden moet op een zeker moment de kaart met nummer 1 op de juiste positie belanden.

2. Singuliere waarden decomposite en het Maxwell-spectrum

M.A. Botchev, Universiteit Twente

Met behulp van de singuliere waarden decompositie $U\Sigma V^T$ van K, kunnen we A als volgt transformeren:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} O & -U\Sigma V^T \\ (U\Sigma V^T)^T & -\alpha I_n \end{bmatrix} \qquad (2.1) \\ &= \begin{bmatrix} O & -U\Sigma V^T \\ V\Sigma^T U^T & -\alpha V V^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U & O \\ O & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -\Sigma \\ \Sigma^T & -\alpha I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^T & 0 \\ 0 & V^T \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

waar O nulmatrices van afmetingen $m \times n$ en $n \times m$ voorstelt. De 2×2 blokmatrix $\left[\begin{smallmatrix} O & -\Sigma \\ \Sigma^T & -\alpha I_n \end{smallmatrix}\right]$ ziet er als volgt uit:

$$\begin{bmatrix} O & -\Sigma \\ \Sigma^T & -\alpha I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & -\sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & -\sigma_m & & \\ \sigma_1 & & & -\alpha & & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \\ & & \sigma_m & & & -\alpha & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -\alpha \end{bmatrix}$$

waarbij de niet weergegeven elementen nul zijn. Nu verwisselen we de eerste $2m$ rijen van deze matrix in de volgende volgorde: 1, $m+1$, 2, $m+2$, $\dots$, m, $m+m$. De laatste $n-m$ rijen laten we ongewijzigd. Vervolgens verwisselen we de eerste $2m$ kolommen van deze matrix in de dezelfde volgorde 1, $m+1$, 2, $m+2$, $\dots$, m, $m+m$ (en laatste $n-m$ kolommen worden niet veranderd). Deze omwisselingen van rijen en kolommen leveren de matrix $\tilde{A}$ op:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_1 & & & & & & & & \\ \sigma_1 & -\alpha & & & & & & & & \\ & & 0 & -\sigma_2 & & & & & & \\ & & \sigma_2 & -\alpha & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & -\sigma_m & & & \\ & & & & & \sigma_m & -\alpha & & & \\ & & & & & & & -\alpha & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & -\alpha \end{bmatrix}$$

Maar hoe kunnen we het verband tussen A en $\tilde{A}$ in een formulevorm weergeven? Volgens het tweede lemma kan elke omwisseling van de rijen weergegeven worden als $P \left[\begin{smallmatrix} O & -\Sigma \\ \Sigma^T & -\alpha I_n \end{smallmatrix}\right]$, waar P een permutatiematrix is. Omdat de kolommen van een matrix de rijen van de getransponeerde matrix zijn, kunnen we de omwisseling van de kolommen als volgt uitvoeren:

1. $P \left[\begin{smallmatrix} O & -\Sigma \\ \Sigma^T & -\alpha I_n \end{smallmatrix}\right]$ transponeren;

2. de rijen van $(P \begin{bmatrix} O & -\Sigma \\ \Sigma^T & -\alpha I_n \end{bmatrix})^T$ omwisselen, wat de matrix $P(P \begin{bmatrix} O & -\Sigma \\ \Sigma^T & -\alpha I_n \end{bmatrix})^T$ oplevert (met dezelfde P omdat de volgorde van omwisselen van de rijen en kolommen dezelfde is);

3. de hierbij gekregen matrix terug transponeren:

$$\left(P(P \begin{bmatrix} O & -\Sigma \\ \Sigma^T & -\alpha I_n \end{bmatrix})^T\right)^T = \left(P \begin{bmatrix} O & -\Sigma \\ \Sigma^T & -\alpha I_n \end{bmatrix}^T P^T\right)^T = P \begin{bmatrix} O & -\Sigma \\ \Sigma^T & -\alpha I_n \end{bmatrix} P^T = \tilde{A}.$$

Omdat P orthogonaal is ($P^{-1} = P^T$), volgt hieruit dat

$$\begin{bmatrix} O & -\Sigma \\ \Sigma^T & -\alpha I_n \end{bmatrix} = P^T \tilde{A} P.$$

Substitutie van deze uitdrukking in (2.1) levert op:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} U & O \\ O & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -\Sigma \\ \Sigma^T & -\alpha I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^T & O \\ O & V^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & O \\ O & V \end{bmatrix} P^T \tilde{A} P \begin{bmatrix} U^T & O \\ O & V^T \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} U & O \\ O & V \end{bmatrix} P^T\right) \tilde{A} \left(\begin{bmatrix} U & O \\ O & V \end{bmatrix} P^T\right)^T. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Verder is het gegeven dat $A = Q\tilde{A}Q^T$ en dus $\tilde{A} = Q^T A Q$. Samen met (2.2), geeft dit een uitdrukking voor Q:

$$Q = \begin{bmatrix} U & O \\ O & V \end{bmatrix} P^T.$$

De matrix Q is dus inderdaad orthogonaal omdat het een product van twee orthogonale matrices is.
Het is niet moeilijk om te zien dat A en $\tilde{A}$ dezelfde eigenwaarden hebben:

$$Ax = \lambda x \;\Leftrightarrow\; Q\tilde{A}Q^T x = \lambda x \;\Leftrightarrow\; \tilde{A}Q^T x = \lambda Q^T x.$$

$2m$ eigenwaarden van $\tilde{A}$ en A zijn die van de diagonaalblokken $\begin{bmatrix} 0 & -s_j \\ s_j & -\alpha \end{bmatrix}$ van $\tilde{A}$. Deze eigenwaarden kunnen makkelijk bepaald worden:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -s_j \\ s_j & -\alpha - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{wortels:}$$

$$\lambda_{2j-1} = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4s_j^2}}{2}, \quad \lambda_{2j} = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4s_j^2}}{2}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

De andere $n - m$ eigenwaarden van $\tilde{A}$ en A zijn aan $-\alpha$ gelijk.

Singuliere waarden decompositie (ofwel SVD, van de Engelse naam "Singular Value Decomposition") is één van de fundamentele matrix decomposities en heeft talloze toepassingen in o.a. statistiek, techniek, beeld- en geluidbewerking.

Deze opgave is gebaseerd op een stelling uit M.A. Botchev, J.G. Verwer, Numerical integration of damped Maxwell equations, SIAM J. Sci. Comput., 2009, vol. 31(2), pp. 1322-1346

Thomas Stieltjes Institute for Mathematics

The Thomas Stieltjes Institute for Mathematics is a Dutch research institute in mathematics and carries out research in four main areas of fundamental and applied mathematics:

- Algebra & Geometry
- Analysis
- Stochastics
- Operation Research

In the Institute participate:

- University of Amsterdam (UvA)
- Free University Amsterdam (VUA)
- Delft University of Technology (TUD)
- Eindhoven University of Technology (TUE)
- University of Leiden (UL)
- Tilburg University (UvT)

The Institute collaborates with

- the Centre for Mathematics and Computer Science (CWI) in Amsterdam.
- the European Institute for the Study of Randomness (EURANDOM) in Eindhoven.

For master- and Ph.D.-students the Stieltjes Institute organises each year a Stieltjesweek about a central theme in mathematics. Faculty members of the different universities present the lectures about such a new theme. Each Stieltjes phd-student receives a contribution of 250 euro in the printing costs of the thesis.
Each year a Stieltjes Prize is presented for the best Stieltjes thesis and the winner receives an amount of 1200 euro.

http://www.stieltjes.org/
stieltjes@math.leidenuniv.nl
+31 71 527 7042

3. Machtreeksen en matrices

G.L.M. Cornelissen, Universiteit Utrecht

(a) Als $a_0 = 0$ en $a_1 \neq 0$, dan willen we b_i vinden zodat

$$\sum_{n\geq 1} a_n(\sum_{m\geq 0} b_m t^m)^n = t,$$

en vergelijken van coëfficiënten geeft $b_0 = 0$, $b_1 = a_1^{-1}$ (zinvol want $a_1 \neq 0$) en dan iteratief vergelijkingen van de vorm $a_1 b_j =$ een eindige som van bekende dingen, en die kunnen we uniek oplossen in b_j omdat a_1 niet nul is.

(b) Het neutrale element is de machtreeks t. Associatief want samenstellen is altijd associatief. Alles heeft wegens a. een inverse. En samenstellen van machtreeksen met $a_0 = 0$ en $a_1 \neq 1$ levert altijd eenzelfde soort machtreeks.

(c) Γ^i is de kern van een groepshomomorfisme, namelijk naar formele machtreeksen modulo t^i. Het kan ook door berekening.

(d) Narekenen; de kern bestaat uit de diagonale matrices (dus waarvoor $c = 0$ en $a = d$).

(e) Elementen van $\Gamma^2\backslash\Gamma$ worden voorgesteld door machtreeksen modulo t^3. De door φ geïnduceerde afbeelding $\bar{\varphi} : B \to \Gamma^2\backslash\Gamma$ heeft een inverse, nl.

$$Bt + Ct^2 \bmod t^3 \mapsto \begin{pmatrix} B & 0 \\ C/B & 1 \end{pmatrix}.$$

Als $f \in \Gamma$, stel $g := \bar{\varphi}^{-1}(\Gamma^2 f)$ en $f_2 := f \circ g^{-1} \in \Gamma^2$. Uniciteit van de ontbinding volgt uit de bijectiviteit van $\bar{\varphi}$.

4. Tweemacht

H.C.A. van Tilborg, Technische Universiteit Eindhoven

Vermenigvuldig de vergelijking $1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 2^k$ met 6. Je krijgt dan

$$(n+1)(n^2 - n + 6) = 3 \cdot 2^{k+1}.$$

Er zijn nu twee mogelijkheden:

Mogelijkheid 1: $n + 1 = 2^u$ en $n^2 - n + 6 = 3 \cdot 2^{k+1-u}$.
Invullen van $n = 2^u - 1$ in $n^2 - n + 6 = 3 \cdot 2^{k+1-u}$ levert

$$2^{2u} - 2^{u+1} - 2^u + 2^3 = 3.2^{k+1-u}. \tag{4.1}$$

De kleinste macht van 2 in deze vijf termen moet minstens twee keer voorkomen (je kunt bijvoorbeeld niet hebben dat vier termen door 16 deelbaar zijn en de vijfde term niet).

- Als $u = 3$ en $k + 1 - u > 3$ dan vinden we als enige mogelijkheid dat $n = 7$ en $k = 6$.

Mogelijkheden zijn of $u = k + 1 - u,\ u < 3$ of $k + 1 - u = 3,\ u > 3$. Mogelijkheid $u = 3,\ k + 1 - u > 3$ levert $n = 7,\ k = 6$. Mogelijkheid $u = k + 1 - u,\ u < 3$ impliceert $u \leq 2$ en leidt tot $u = 2$, (met $n = 3$ en $k = 3$) of $u = 1$ (met $n = 1$ en $k = 1$). Tenslotte reduceert mogelijkheid $k + 1 - u = 3,\ u > 3$ vergelijking (4.1) tot $2^{2u} - 2^{u+1} - 2^u = 2^4$. Opnieuw moet de laagste macht van 2 dubbel voorkomen, Dus $u = 4$ en $n = 15$, maar dat leidt niet tot een k.

Mogelijkheid 2: $n + 1 = 3.2^u$ en $n^2 - n + 6 = 2^{k+1-u}$.
Invullen van $n = 3.2^u - 1$ in $n^2 - n + 6 = 2^{k+1-u}$ levert

$$9.2^{2u} - 3.2^{u+1} - 3.2^u + 2^3 = 2^{k+1-u}. \tag{4.2}$$

Vergelijking van de kleinste macht van 2 die dubbel moet voorkomen levert opnieuw 3 mogelijkheden. Mogelijkheid $u = 3,\ k + 1 - u > 3$ levert $n = 23,\ k = 12$. Mogelijkheid $u = k+1-u,\ u < 3$ impliceert $u \leq 2$ en leidt enkel tot de oplossing $u = 0,\ n = 2,\ k = 2$. Tenslotte reduceert mogelijkheid $k+1-u = 3,\ u > 3$ vergelijking (4.2) tot $9.2^{2u} - 3.2^{u+1} - 3.2^u = 0$ die geen oplossing heeft omdat maar 2^{u+1} twee termen deelt, maar niet de derde.

De oplossingen worden dus gegeven door:

mogelijkheid	u	n	k
1	1	1	1
1	2	3	3
1	3	7	6
2	0	2	2
2	3	23	12

Master's programme
Mathematics (MSc.)

More Information

Mirte Dekkers
mdekkers@math.ru.nl
www.ru.nl/master

The department

The department

The Mathematics department currently has 14 staff members and a fluctuating population of about 10 PhD students and postdocs. This relatively small size of the department has considerable advantages for students. You will not drown in a large student pool, and contact with staff and fellow students is pleasant and very easy to make. We take a highly personal approach! The combination of local courses and lectures offered by the national Dutch Master Program in Mathematics guarantees a broad and high-level range of topics to choose from.

Career prospects

Career prospects

Our graduates are analysts and problem solvers who make contributions in many fields. Most find employment immediately after graduating, in a very wide range of jobs including business, academia, government and ICT.

Research topics

Research topics

Our Master's programme is closely related to the research carried out in the Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics *(IMAPP)*.
Nijmegen mathematicians have established many types of different relationships with other disciplines and research institutes. As is often the case with many research departments, the research topics are linked to individuals. Therefore, we invite you to look at the website **www.ru.nl/science/math**, where you can find more information.

You can choose from the following specializations:

• **Algebra and Logic**
Lattice-ordered algebras, topological dualities, algebraic logic, computer algebra in its many forms, affine algebraic geometry, intuitionistic and constructive mathematics, and, in collaboration with the Institute for Computing and Information Science (ICIS) an exciting interdisciplinary programme in the mathematical foundations of computer science.

• **Mathematical Physics**
Representation theory, symplectic geometry, integrable systems, special functions, non-commutative geometry, Topos theory, mathematical foundations of quantum theory, quantum probability, quantum computing, quantum field theory, groupoids.

• **Stochastics**
In particular stochastics applied to applied to neuro-science; a co-operation between the IMAPP and the Donders Institute for Brain, Cognition and Behaviour.

Personal tutor for a tailor-made programme

Under the guidance of a personal tutor, our Master's programme offers you considerable freedom to follow your own interests. At the beginning of the 2 year programme you choose your specialization, within which you can select a research group. You will be allocated to a personal tutor, with whom you will decide the research area on which you wish to focus and the most appropriate specializations and subjects. In short, you will develop a tailor-made programme based on your own interests.

Master's programme
Mathematics (MSc.)

Photography: Dick van Aalst. Graphic Design: Jessica Weeren | FNWI Onderwijszaken | April 2009

5. Driedimensionale som

G.W.Q. Puite, Technische Universiteit Eindhoven

We kunnen 1 schrijven als $1 = 1^n = (2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2})^n = \big((2+\frac{1}{2}) - (2-\frac{1}{2})\big)^n$. Als we dat een paar keer uitwerken met het binomium van Newton krijgen we

$$\begin{aligned}
1 &= \big((2+\tfrac{1}{2}) - (2-\tfrac{1}{2})\big)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (2-\tfrac{1}{2})^k (2+\tfrac{1}{2})^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left(\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} 2^m (-1)^{k-m} (\tfrac{1}{2})^{k-m} \right) \left(\sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} 2^\ell (\tfrac{1}{2})^{n-k-\ell} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m} \binom{n-k}{\ell} (-1)^k 2^m (-1)^{k-m} (\tfrac{1}{2})^{k-m} 2^\ell (\tfrac{1}{2})^{n-k-\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{m!(k-m)!} \frac{(n-k)!}{\ell!(n-k-\ell)!} (-1)^{2k-m} 2^{m+\ell} (\tfrac{1}{2})^{k-m+n-k-\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{n!}{m!(k-m)!\ell!(n-k-\ell)!} (-1)^m 2^{2m+2\ell-n}.
\end{aligned}$$




6. Gezellige grafen

V. van der Noort, Universiteit Utrecht

Dit antwoord is gebaseerd op de oplossing van Jeroen Sijsling.

Zij (V, E) een graaf. Een verzameling $W \subset V$ noemen we een *perfecte vertexcover* als iedere lijn $e \in E$ *precies één* punt $w \in W$ bevat. (Een gewone vertexcover is een verzameling $W \subset V$ zodat iedere $e \in E$ minstens een punt $w \in W$ bevat - ik weet niet of het bijvoeglijk naamwoord perfect buiten deze opgave in deze betekenis gebruikt wordt.)

Lemma 1 *De graaf C_n gedefinieerd in de opgave heeft een perfecte vertexcover.*

Bewijs. Ieder punt $v \in V_n$ is van de vorm $(a_1, \ldots, a_n)$ met $a_i \in \{0, 1\}$. Noem $V_{O,n} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in V_n : \sum a_i \text{ is oneven }\}$ en $V_{E,n} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in V_n : \sum a_i \text{ is even }\}$. Omdat iedere lijn $e \in E_n$ een punt uit $V_{O,n}$ verbindt met een punt uit $V_{E,n}$, is zowel $V_{O,n}$ als $V_{E,n}$ een perfecte vertexcover van C_n. □

Lemma 2 *Een gezellige graaf met een perfecte vertexcover heeft een oneven aantal lijnen.*

Bewijs. Zij (V, E) een gezellige graaf, $f : E \to \{1, \ldots, |E|\}$ de functie uit de definitie van gezellig en $W \subset V$ een perfecte vertexcover. Omdat W een perfecte vertexcover is, geldt:

$$\sum_{e \in E} f(e) = \sum_{v \in W} \sum_{e \ni v} f(e).$$

Volgens de definitie van gezellig staat aan de rechterkant een som van getallen die deelbaar zijn door $|E|$ en dus is het getal aan de rechterkant van het gelijkteken zelf ook deelbaar door $|E|$. Wegens de bijectiviteit van f staat aan de linkerkant van het gelijkteken de som $1 + 2 + \ldots + |E| = \frac{|E|(|E|+1)}{2}$. Als we beide kanten van de vergelijking door $|E|$ delen vinden we dus dat $\frac{|E|+1}{2} \in \mathbb{N}$. Dit kan alleen als $|E|$ oneven is. □

Lemma 3 *Zij $n \geq 2$ en zij $C_n = (V_n, E_n)$ als in de opgave. Dan is $|E_n|$ even.*

Bewijs. We delen E_n op in drie disjuncte deelverzamelingen:

$$
\begin{aligned}
E_n^0 &= \{\{v_1, v_2\} \in E_n : \text{zowel } v_1 \text{ als } v_2 \text{ heeft als laatste coördinaat } 0\} && (6.1)\\
E_n^1 &= \{\{v_1, v_2\} \in E_n : \text{zowel } v_1 \text{ als } v_2 \text{ heeft als laatste coördinaat } 1\} && (6.2)\\
E_n^{flip} &= \{\{v_1, v_2\} \in E_n : \text{de laatste coördinaten van } v_1 \text{ en } v_2 \text{ zijn verschillend}\} && (6.3)\\
& && (6.4)
\end{aligned}
$$

Het is duidelijk dat $|E_n^0| = |E_n^1|$ dus de pariteit van $|E_n|$ is gelijk aan de pariteit van $|E_n^{flip}|$. Als $\{v_1, v_2\} \in E_n^{flip}$ dan zijn de eerste $n-1$ coördinaten van v_1 en v_2 gelijk. Het negeren van de laatste coördinaat geeft een bijectie tussen $|E_n^{flip}$ en $\{0, 1\}^(n-1)$. Dit betekent dat $|E_n^{flip}| = 2^{n-1}$. Aangezien $n \geq 2$, is 2^{n-1} even en $|E_n|$ dus ook. □

De drie lemma's samen impliceren dat:

$$\{n \geq 1 : C_n \text{ is gezellig}\} \subset \{1\}$$

Het is niet moeilijk om door middel van een expliciete gezelligheidsfunctie te laten zien dat de omgekeerde inclusie ook geldt. Het antwoord op de opgave is dus:

$$\{n \geq 1 : C_n \text{ is gezellig}\} = \{1\}$$

De volgende variant op de opgave is nog een OPEN PROBLEEM:
Vind alle $n \geq 2$ zodat de volledige graaf op n punten gezellig is.

7. Borrel

B. van Dalen, Universiteit Leiden

(a) Stel dat er wel zo'n schema bestaat. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat de praeses tijdens alle rondes in dezelfde ruimte borrelt; deze ruimte noemen we P. De andere ruimte noemen we Q. De overige $2n-2$ leden noemen we A_1, A_2, …, A_{2n-2}. Opnieuw zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat tijdens ronde 1 de leden A_1, A_2, …, A_{n-1} in ruimte P borrelen en de leden A_n, A_{n+1}, …, A_{2n-2} in ruimte Q. Zij nu C de verzameling van leden A_i (zonder de praeses) die zowel tijdens ronde 1 als ronde 2 in ruimte P borrelen, en zij D de verzameling van leden A_i (zonder de quaestor) die zowel tijdens ronde 1 als ronde 2 in ruimte Q borrelen. Omdat de leden uit C de eerste twee rondes de praeses tegenkomen in ruimte P, moeten al deze leden in ronde 3 naar ruimte Q om ook de quaestor tegen te komen. Zo ook moeten alle leden uit D in ronde 3 naar ruimte P. Dit betekent dat de leden in C in alle rondes in een andere ruimte borrelen dan de leden in D. Dit is alleen in overeenstemming met de voorwaarden als zowel C als D leeg zijn. Maar dat betekent dat in ronde 2 de leden $A_1, \ldots, A_{n-1}$ net als in ronde 1 bij elkaar zitten (maar nu in ruimte Q) en dat ze dus allemaal in ronde 3 nog alle $n-1$ leden $A_n, \ldots, A_{2n-2}$ moeten ontmoeten. Dat betekent dat er in ronde 3 minstens $2n-1$ leden in dezelfde ruimte moeten borrelen. Aangezien $n \geq 3$, is $2n-1 > n$ en dat is een tegenspraak.

(b) We geven een schema dat voldoet. We bekijken weer ruimtes P en Q en laten in het schema verder de praeses (altijd in P) en de quaestor (altijd in Q) weg. De overige leden noemen we weer A_1, A_2, …, A_{2n-2}. We onderscheiden twee gevallen: n is even of n is oneven. Bekijk eerst het geval dat n oneven is. We schrijven n als $n = 2m+1$ met $m \geq 1$ geheel. We definiëren verzamelingen $C = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, $D = \{A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots, A_{2m}\}$, $E = \{A_{2m+1}, A_{2m+2}, \ldots, A_{3m}\}$ en $F = \{A_{3m+1}, A_{3m+2}, \ldots, A_{4m}\}$. Het is nu voldoende als in het schema elke combinatie van twee letters uit C, D, E en F een keer in dezelfde ruimte voorkomt en daarnaast elke letter in beide ruimtes een keer voorkomt. Het volgende schema voldoet.

ronde	ruimte P	ruimte Q
1	C, D	E, F
2	C, E	D, F
3	C, F	D, E
4	E, F	C, D

Bekijk nu het geval dat n even is. We schrijven $n = 2m+2$ met $m \geq 1$ geheel. We definiëren verzamelingen $C = \{A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}\}$, $D = \{A_{m+2}, A_{m+3}, \ldots, A_{2m+1}\}$, $E = \{A_{2m+2}, A_{2m+3}, \ldots, A_{3m+2}\}$ en $F = \{A_{3m+3}, A_{3m+4}, \ldots, A_{4m+2}\}$. Merk op dat C en E elk bestaan uit $m+1$ leden, terwijl D en F elk bestaan uit m leden. Net als hierboven is het voldoende als elke combinatie van twee letters een keer in dezelfde ruimte voorkomt en daarnaast elke letter in beide ruimtes een keer voorkomt. Echter, de verzamelingen C en E passen niet samen in één ruimte (met de praeses of quaestor er nog bij). Daarom laten we de verzamelingen C en E in twee etappes elkaar ontmoeten.

Hiervoor voeren we de notatie $C\backslash A_i$ in, wat staat voor de verzameling C met daaruit persoon A_i verwijderd. Nu voldoet het volgende schema.

ronde	ruimte P	ruimte Q
1	C, D	E, F
2	C, F	D, E
3	$C\backslash A_1$, E	D, F, A_1
4	D, F, A_2	$C\backslash A_2$, E

Noot: overigens hebben de voorzitter en penningmeester van A–Eskwadraat, in elk geval ten tijde van het ter perse gaan van dit boekje, geen ruzie met elkaar. Daarom zal de borrel, die direct na het wedstrijdgedeelte van deze LIMO wordt gehouden, in één ruimte plaats vinden. Zo kan iedereen elkaar tegelijk tegen komen.

Master Mathematics

Het Mathematisch Instituut streeft naar excellentie in onderzoek én onderwijs.
Als student maak je deel uit van een van de toonaangevende onderzoeksgroepen van het instituut, met persoonlijke en informele begeleiding van de staf.
Zo maken studenten en docenten samen onze opleiding, gedreven door hun interesse, expertise en goede contacten in de wetenschappelijke wereld en het bedrijfsleven.
Voor een Master Mahtematics is Leiden een uitstekende keuze!

De Universiteit Leiden biedt vijf mastertracks aan binnen de Master Mathematics:

Algebra, Geometry and Number Theory
Applied Mathematics
Mathematics and Science Based Business
Mathematics and Education
Mathematics and Communication

Een internationale of interdisciplinaire invulling, bijvoorbeeld met natuurkunde, astronomie of levenswetenschappen, kun je in overleg realiseren.

Meer weten? voorlichting@math.leidenuniv.nl

Universiteit Leiden

www.mastersinleiden.nl

Universiteit Leiden. Universiteit om te ontdekken.

8. Grote gemene wortels

H. Lenstra, Universiteit Leiden

Kwadrateren we $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{z}$ dan krijgen we $x+y+2\sqrt{xy}=z$. Schrijven we $d=\text{ggd}(x,y)$ en $s=x/d$, $t=y/d$, dan zijn s en t onderling ondeelbare positieve gehele getallen met $\sqrt{st}=(z-x-y)/(2d)$ en dus $st=(z-x-y)2/(2d)2$. Hieruit volgt dat $(2d)2$ een deler is van $(z-x-y)2$, en uit de priemfactorontbinding van deze getallen leest men dan af dat $2d$ ook een deler van $z-x-y$ is. Uit $st=\big((z-x-y)/(2d)\big)2$ blijkt nu dat st het kwadraat van een positief geheel getal is. Omdat s en t onderling ondeelbare positieve gehele getallen zijn, moeten s en t elk een kwadraat zijn, zeg $s=u2$ en $t=v2$, met u en v positief en geheel. Dan geldt $x=sd=u^2d$ en $y=td=v^2d$. Substitueert men dit in $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{z}$, dan krijgt men $\sqrt{z}=(u+v)\cdot\sqrt{d}$ dus $z=d\cdot(u+v)2=\text{ggd}(x,y)\cdot w2$ met $w=u+v$, zoals verlangd.

9. Kansrekening

R.W.J. Meester, Vrije Universiteit Amsterdam

De opgave is op te lossen door de zg. drie-reeksen stelling van Kolomogorov te gebruiken, maar ik geef hier een ander, elementair, argument.

Allereerst merk ik op dat de oplossing eenvoudig is als de termen van de reeks niet naar nul convergeren: in dat geval namelijk is er een $\epsilon > 0$ zodanig dat voor oneindig veel indices n geldt dat $a_n > \epsilon$. Het is dan duidelijk dat er in die collectie indices ook oneindig veel X_n's zijn met $X_n = 1$, alles met kans 1 uiteraard. De conclusie is dan dat de nieuwe som weer divergeert.

We nemen daarom nu aan dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Laat $n_0 = 0$ en laat n_1 de kleinste index n zijn waarvoor geldt dat $a_1 + \cdots + a_n \geq 1$. Laat, inductief, n_{k+1} de kleinste index $n > n_k$ zijn waarvoor $a_{n_k+1} + \cdots + a_{n_{k+1}} \geq 1$. Natuurlijk kunnen we aannemen dat deze sommen niet alleen minstens 1 zijn, maar ook hooguit bijvoorbeeld 2. Definieer $Y_k = a_{n_k+1}X_{n_k+1} + \cdots + a_{n_{k+1}}X_{n_{k+1}}$.

Het is duidelijk dat $E(Y_k) \geq p$ voor alle k. Verder merken we op dat $\mathrm{Var}(Y_k) = p(1-p)\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n 2$. Vanwege de keuze van de n_k's, weten we dat $\mathrm{Var}(Y_k) \leq p(1-p)\max_{n_k+1\leq j\leq n_{k+1}} a_j \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n$ en dit is hooguit $2p(1-p)\max_{n_k+1\leq j\leq n_{k+1}} a_j$. Aangezien $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ zien we dat $\lim_{k\to\infty} \mathrm{Var}(Y_k) = 0$. De ongelijkheid van Chebyshev geeft nu dat $P(|Y_k - E(Y_k)| \geq p/2) \leq 2\mathrm{Var}(Y_k)/p \to 0$ als $k \to \infty$. Als $|Y_k - E(Y_k)| \leq p/2$, dan is $Y_k \geq p/2$. We zien dus dat $P(Y_k \geq p/2) \to 1$ voor $k \to \infty$. De conclusie volgt nu, aangezien de Y_k's onafhankelijk zijn van elkaar.

Bovenstaande methode is waarschijnlijk het meest voor de hand liggend. Het kan ook anders: als we de random partiele sommen aangeven met Z_n, dan kun je ook naar e^{-Z_n} gaan kijken, en laten zien dat de verwachting hiervan naar nul convergeert. Aangezien de termen begrensd zijn, volgt dan ook convergentie in kans naar nul, en vanwege monotoniciteit volgt convergentie in verdeling dan ook. Als je de details vand eze methode op wilt schrijven, is de oplossing misschien iets korter dan bovenstaande oplossing, maar ook wel iets "getructer".

10. Matrix kwadraat

F. Beukers, Universiteit Utrecht

Definieer eerst $\mathrm{Tr}(M) = \det(I + M) - 1$. Omdat M rang 1 heeft, heeft de eigenruimte bij 0 dimensie $n - 1$. De laatste eigenwaarde is $\mathrm{Tr}(M)$. De eigenwaardevergelijking luidt dus $\det(M - \lambda I) = (-1)^n(\lambda^n - \mathrm{Tr}(M)\lambda^{n-1})$. Vul hier $\lambda = -1$ in: $\det(M + I) = 1 + \mathrm{Tr}(M)$.

Bij een rang–1–matrix M kun je kolomvectoren u, v vinden zó dat $M = u^t v$.

Dus $M^2 = u^t v u^t v = (u \cdot v)u^t v = (u \cdot v)u^t v$ waarin $u \cdot v$ het inproduct is. Merk op dat $u \cdot v = \mathrm{Tr}(M)$.

Realize your master plan

Universiteit Utrecht

[Faculty of Science
Mathematics]

www.math.uu.nl

Master's programmes

Mathematical Sciences

Scientific Computing

Stochastics &
Financial Mathematics

11. Lipschitz continuïteit

S.G. Janssens, Universiteit Utrecht

Dit antwoord is geschreven door Egbert Rijke.

We beginnen met de opmerking dat $y = 0$ invullen leidt tot de conclusie dat $|f(x)| \leq c$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$ (gebruik continuïteit van f voor het geval dat ook $x = 0$). We nemen zonder verlies van algemeenheid aan dat $x < y$. De middelwaardestelling toepassend op de functie $x \mapsto xf(x)$ geeft ons een punt $\xi \in (x, y)$ waarvoor geldt

$$\frac{|xf(x) - yf(y)|}{|x - y|} = |\xi f'(\xi) + f(\xi)| \leq c.$$

In combinatie met de eerste opmerking leidt dit tot $|\xi f'(\xi)| \leq 2c$ voor iedere door de middelwaare gekozen $\xi \in \mathbb{R}$. Maar deze ξ liggen dicht in $\mathbb{R}$; met de continuïteit van $x \mapsto xf'(x)$ geldt er dus voor iedere x dat $xf'(x) \leq 2c$. We kunnen bovendien $f'(x) \leq 2c$ afschatten wanneer $|x| > 1$ en op het gesloten interval $[-1, 1]$ neemt $|f'|$ een maximum M aan. Samengevat, er geldt voor de afgeleide f' van f dat $f'(x) \leq \max(2c, M)$. Met de middelwaardestelling concluderen we nu de opgave: voor iedere $x < y$ geldt dat

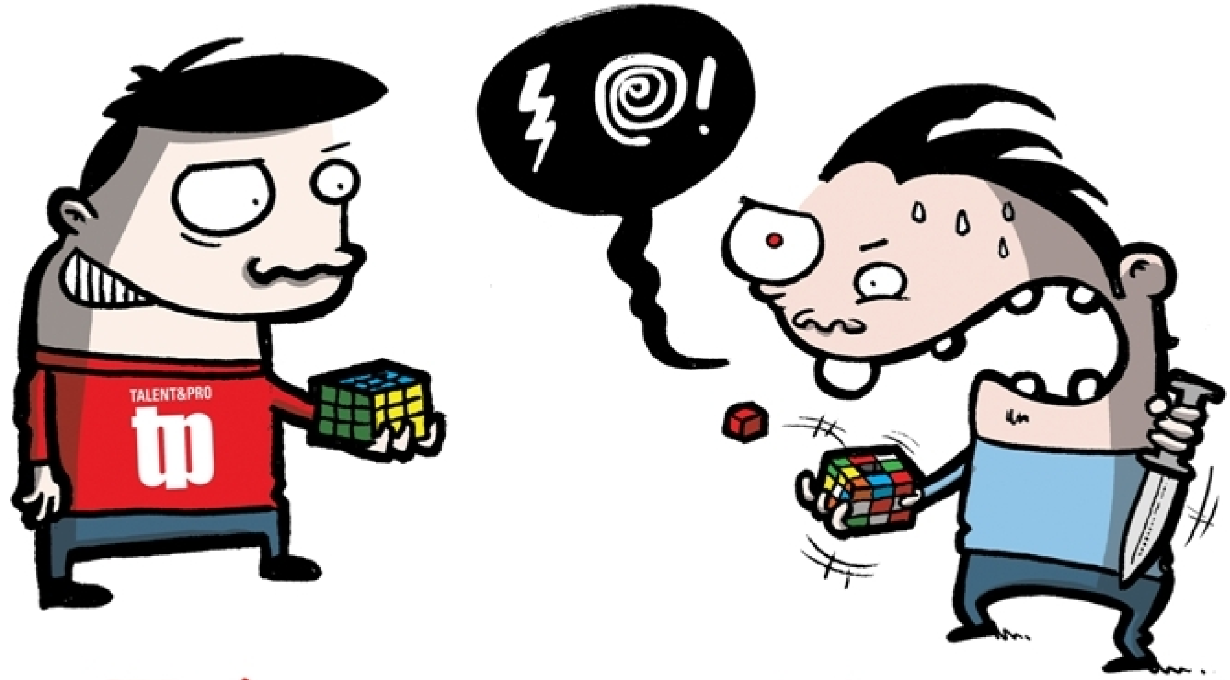
$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \sup\{|f'(\eta)| : \eta \in (x, y)\} \leq \max(2c, M).$$

Life is All about Options...

$((4 + 3)^2 + 4) / 1/4 = . . .$ $\sqrt{576} + 11 \times 3^2 = . . .$

$11 + 6^3 = . . .$ $\sqrt{196} = . .$

http://- - - . - - - . - - - . - -



Talent om te kiezen

Werken met cijfers: dát is wat je leuk vindt!
Puzzelen en zoeken naar de juiste oplossing, het uitpluizen van ingewikkelde formules en complexe berekeningen maken. Natuurlijk kun je met jouw bèta-achtergrond als onderzoeker of docent aan de slag. Misschien doe je dat zelfs al. Toch zoek je nét iets anders. Een baan in het bedrijfsleven biedt nieuwe perspectieven: hier komt jouw wiskundig inzicht namelijk goed van pas!

Talent&Pro Actuarieel
Talent&Pro richt zich op jouw ontwikkeling tot Actuarieel Rekenaar, Actuarieel Analist en Actuaris. In dit vakgebied pas je jouw wiskundig inzicht toe op vraagstukken in het bedrijfsleven. De opleiding die je daarvoor volgt, biedt Talent&Pro je aan in samenwerking met het Actuarieel Instituut. Daarnaast volg je ook verschillende vaardigheidstrainingen, zoals Management Development en Communicatie (beide post-hbo), zodat je in de praktijk nóg beter presteert.

Persoonlijke ontwikkeling
Jouw persoonlijke ontwikkeling staat centraal bij Talent&Pro. De hele organisatie, van persoonlijke coach tot je ruim 300 collega´s, heeft al sinds de oprichting in 1999 de missie: mensen ontwikkelen voor de markt. Dat houdt in dat Talent&Pro je in de eerste jaren van je carrière begeleidt en je helpt je passies en talenten te ontdekken, zodat je gericht kunt werken aan jouw ambities.

Talent&Pro in de praktijk
Gemiddeld werk je per jaar aan 3 verschillende opdrachten bij onze relaties in het bank- en verzekeringswezen, bij pensioenfondsen en actuariële adviesbureaus. Er is genoeg mogelijkheid om de ervaring die je daar opdoet uit te wisselen met collega's. Daarvoor worden verschillende uitjes georganiseerd, zoals een filmpremière op het Nederlands Film Festival, een skivakantie of gewoon gezellig een avondje borrelen.

Solliciteren
Voor ambitieuze Talenten en Pro-ers is altijd plek bij Talent&Pro. Spreekt het bovenstaande jou aan, ben je in het bezit van rijbewijs B en woon je in centraal Nederland of ben je bereid te verhuizen? Stuur dan een motivatie met je CV naar recruitment@talent-pro.com of kom een keer kennismaken tijdens een Castingdag op ons kantoor! Kijk ook op onze website www.talentomtekiezen.nl voor alle vacatures!

TALENT&PRO

www.talentomtekiezen.nl