Hoofdsponsor

Transtrend

Uitwerkingen

Radboud Universiteit

Universiteit Utrecht

Wiskunde Onderzoekschool nederland
The Dutch Research School in Mathematics

DIAMANT
Discrete Interactive and Algorithmic Mathematics Algebra and Number Theory
A mathematics cluster funded by NWO OCW and EZ

KONINKLIJKE HOLLANDSCHE MAATSCHAPPIJ DER WETENSCHAPPEN

KWG

Maastricht University
Leading in Learning!

GQT

Universiteit Leiden

ASML
For students who think ahead

TU/e Technische Universiteit Eindhoven University of Technology

KU LEUVEN

UNIVERSITEIT GENT

Keylane | Quinity
non-life insurance software

UNIVERSITEIT TWENTE.

KNAW

Dit uitwerkingenboekje is een uitgave van de LIMO-commissie 2015:
Franziska van Dalen, Merlijn Staps, Jan-Willem van Ittersum, Wicorel van der Pol, Marieke van der Wegen, Daniël Kroes, Bas Nieraeth, Michael van den Hoogenband.
e-mail: `limo1415@a-eskwadraat.nl`
website: `limo.a-eskwadraat.nl`

Opgaven: Roberto Fernandez, Karma Dajani, Willem Pranger, Harold de Boer, Josse van Dobben de Bruyn, Jaap Top, Hendrik Lenstra, Fokko van de Bult, Sjoerd Boersma, Michiel Hochstenbach, Tom Verhoeff, Moritz Schauer, Christos Pelekis, Richard Kraaij, Daniël Kroes.

Inhoudsopgave

1. Vazen, knikkers en een oneerlijke munt

Prof. dr. Roberto Fernandez en dr. Karma Dajani, Universiteit Utrecht

Deze opgave bestaat uit twee ongerelateerde vraagstukken die onafhankelijk van elkaar gemaakt kunnen worden.

(a) Zij k een niet-negatief geheel getal. Een vaas bevat k zwarte knikkers en één rode knikker. Om beurten pakken Peter en Paula een knikker uit deze vaas (zonder terug te leggen), totdat één van hen de rode knikker pakt. Degene die de rode knikker pakt wint het spel. Aangezien Peter een echte heer is, laat hij Paula kiezen of ze wil beginnen. Paula vermoedt dat ze het beste kan beginnen; wie weet pakt ze immers direct de rode knikker. Aan de andere kant nemen Peters kansen om de rode knikker te pakken toe als ze toevallig een zwarte knikker pakt, want dan zitten er als Peter zijn eerste knikker pakt minder zwarte knikkers in de vaas. Wat moet Paula kiezen om haar winstkansen te maximaliseren?

(b) We gooien herhaaldelijk met een munt. Deze munt landt op kop met kans p en op munt met kans $1-p$, waarbij $0 < p < 1$. De uitkomsten van de worpen worden genoteerd, wat er bijvoorbeeld zo uit ziet:

$$K\ K\ K\ M\ M\ M\ M\ M\ K\ M\ \ldots$$

We delen dit op in *blokken* van opeenvolgende gelijke uitkomsten. In het bovenstaande voorbeeld heeft het eerste blok lengte 3 (3× kop), het tweede blok lengte 5 (5× munt) en het derde blok lengte 1 (1× kop). Wat is groter: de gemiddelde lengte van het eerste blok of de gemiddelde lengte van het tweede blok?

Uitwerking.

(a) De beste strategie hangt af van de pariteit van k. Als k even is, is het voordelig om te beginnen. Wanneer k oneven is, zijn Peters en Paula's kansen gelijk. Om dit te bewijzen bekijken we een licht aangepast spel. Peter en Paula kiezen nog steeds om beurten een knikker, maar gaan door met knikkers pakken zonder te kijken welke kleur ze hebben gepakt. Vervolgens bekijkt elke speler de knikkers die hij of zij heeft gepakt. De speler die de rode knikker voor zich heeft liggen, wint. In dit aangepaste spel is de winnaar altijd dezelfde persoon als in het oorspronkelijke spel, dus we kunnen ook naar dit aangepaste spel kijken. Als k oneven is zijn er in totaal $k+1$ knikkers. Beide spelers hebben dan de helft van de knikkers voor zich liggen. Beide helften van de knikkers hebben dezelfde kans om de rode knikker te bevatten, dus Peters en Paula's winkansen zijn gelijk. Als k even is heeft de speler die begint één knikker meer gepakt dan de andere speler ($\frac{k}{2}+1$ knikkers tegenover $\frac{k}{2}$ knikkers). De beginnende speler wint dan met kans

$$\frac{\frac{k}{2}+1}{\left(\frac{k}{2}+1\right)+\frac{k}{2}} = \frac{k+2}{2k+2} > \frac{1}{2}.$$

Kortom, als k even is moet Paula er voor kiezen om te beginnen en wanneer k oneven is, maakt het niet uit.

(b) Omdat de begrippen "kop" en "munt" uitwisselbaar zijn, mogen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $p \leq \frac{1}{2}$. Zij E_K de gemiddelde lengte van een blok met "kop" en zij E_M de gemiddelde lengte van een blok met "munt". Omdat de kans dat de eerste munt op kop valt gelijk is aan p, is de gemiddelde lengte van het eerste blok dan gelijk aan $pE_K + (1-p)E_M$ terwijl de gemiddelde lengte van het tweede blok gelijk is aan $(1-p)E_K + pE_M$. We zien meteen dat als $p = \frac{1}{2}$ beide gemiddeldes gelijk zijn. Als $p < \frac{1}{2}$ geldt $E_K < E_M$, dus dan is

$$\begin{aligned}(1-p)E_K + pE_M &= pE_K + (1-2p)E_K + pE_M \\ &< pE_K + (1-2p)E_M + pE_M \\ &= pE_K + (1-p)E_M\end{aligned}$$

waarbij we gebruikt hebben dat $1 - 2p > 0$. We zien dus dat als $p < \frac{1}{2}$, de gemiddelde lengte van het eerste blok groter is dan de gemiddelde lengte van het tweede blok. In het algemeen geldt dus altijd dat het eerste blok gemiddeld langer is dan het tweede blok, tenzij $p = \frac{1}{2}$ (dan zijn de gemiddeldes gelijk). $\square$

KWG Het Koninklijk Wiskundig Genootschap

Wat is het KWG ?
Het Koninklijk Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde en iedereen die de wiskunde een warm hart toedraagt. De vereniging is in 1778 opgericht en is 's werelds oudste nationale wiskunde genootschappen. Zie website http://www.wiskgenoot.nl/

Wat doet het KWG ?
Het genootschap heeft als doel de wiskunde te bevorderen, en haar beoefening en toepassingen aan te moedigen. Daarnaast vertegenwoordigt het KWG de Nederlandse wiskundige gemeenschap in binnen- en buitenland.

Het KWG steunt diverse wiskundige zusterorganisaties, zoals Vierkant voor Wiskunde. en Epsilon Uitgaven. Daarnaast ondersteunt het KWG via de PW-NOCW verschillende activiteiten voor jongeren, zoals de Wiskunde Olympiade, Wiskunde A-lympiade, Kangoeroe-wedstrijden, Universitaire Olympiade en de Vierkant-kampen.

Het KWG organiseert jaarlijks het Wintersymposium dat bestemd is voor docenten en aankomende docenten in het voortgezet onderwijs en het Nederlands Mathematisch Congres voor alle beoefenaars en liefhebbers van de wiskunde. In 2016 is de 52e editie van het NMC, dit keer gezamenlijk met België en Luxemburg.

Een aantal van de wiskundige werkzaamheden die verbonden zijn met het KWG:

- Het Nieuw Archief voor Wiskunde is het lijfblad van het KWG en verschijnt vier keer per jaar.
- Indagationes Mathematicae is een internationaal wiskundig tijdschrift van het KWG.
- Pythagoras - wiskundetijdschrift voor jongeren stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde.
- Platform Wiskunde Nederland is een gezamenlijk platform opgericht door KWG en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren met als doel de positie van de wiskunde in Nederland te verbeteren.

Het lidmaatschap
Wilt u op de hoogte blijven van nieuwe ontwikkelingen in de wiskunde in Nederland?
Wilt u met vakgenoten discussiëren over wiskundige problemen die u tegenkomt, of zoekt u advies?
Wilt u samen (het plezier in) de wiskunde uitdragen in Nederland, of bijdragen aan de nationale wiskunde-agenda?

Wordt dan nu lid!

Leden van het KWG ontvangen vier keer per jaar het tijdschrift Nieuw Archief voor Wiskunde en elke twee weken de elektronische nieuwsbrief met een uitgebreide agenda van wiskundige activiteiten en vacatures op wiskundig gebied. Leden krijgen korting op de toegangsprijs van het Nederlands Mathematisch Congres en het Wintersymposium.

Studenten
Het KWG biedt aan studenten wiskunde (inclusief lerarenopleiding) een gratis lidmaatschap van één jaar aan, direct na het behalen van hun Bachelordiploma. Ook is er tijdens de studietijd een laag tarief voor het lidmaatschap.
Aanmelden kan met het formulier dat tijdens het examen is uitgereikt, of via de website www.wiskgenoot.nl van het KWG.

Differentiaalmeetkunde II
Wiskundige logica II
Polaire ruimten
Galoismeetkunde
Lineaire algebraïsche groepen
Banachruimten en Banachalgebra's
Cliffordanalyse
Codeertheorie
Bewijstheorie
Representatietheorie en toepassingen
Eindige meetkunde
Infinitesimale analyse
Differentiaalmeetk. structuren en toepassingen
Algebraïsche topologie en homologe algebra
Faseovergangen in logica en combinatoriek
Transformatieanalyse
Incidentiemeetkunde
Capita selecta in de algebra
Capita selecta in de analyse
Capita selecta in de meetkunde
Partiële differentiaalvergelijkingen
Fysica van galaxieën
Relativiteitstheorie
Astrofysische simulaties
Kwantumveldentheorie
Statistische fysica
Extragalactische sterrenkunde
Wisk. aspecten van algemene relativiteitstheorie
Kosmologie en galaxievorming
Kwantumelektrodynamica
Mechanica van continue media
Inleiding tot de dynamica van atmosferen
Niet-perturbatieve kwantumchromodynamica
Num. methoden voor differentiaalvergelijkingen
Vaagheids- en onzekerheidsmodellen
Computeralgebra
Financiële wiskunde: discrete stoch. modellen
Algoritmische grafentheorie
Berekenbaarheid en complexiteit
Statistische besluitvorming
Stochastische processen
Numerieke lineaire algebra
Financiële wiskunde: continue stoch. modellen
Capita selecta in soft computing
Benaderingsmeth. voor randwaardeproblemen
Causale analyse en missing data
Overlevingsanalyse
Toegepaste functionaalanalyse
Kwalit. oplossingstechn. in wet. modellering
Geschiedenis van de wiskunde

Wiskunde aan UGent

Aan de samenvloeiing van Leie en Schelde ligt de historische stad Gent, de provinciehoofdstad van Oost-Vlaanderen en met 65 000 studenten de grootste Vlaamse studentenstad. De Universiteit Gent is vandaag één van de belangrijkste universiteiten in het Nederlandse taalgebied.

De Gentse universiteit heeft een rijke wiskundige traditie en visitatiecommissies beoordeelden haar bachelor- en masteropleiding wiskunde als uitstekend. De studentenvereniging PRIME zorgt voor een stimulerende dynamiek onder wiskundestudenten.

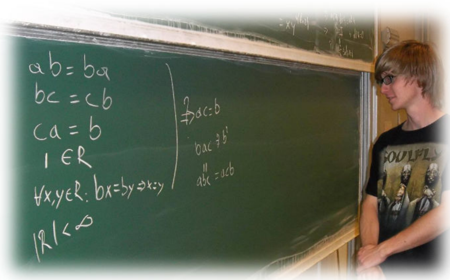
Het masterprogramma wiskunde biedt een grote individuele keuzevrijheid. Naast zuivere en toegepaste wiskunde is er ook een afstudeerrichting wiskundige natuurkunde en sterrenkunde, uniek in Vlaanderen.

Basisvakken (30 ECTS)	**Minor** (30 ECTS)
Zuivere wiskunde	Onderwijs
of Wisk. natuurkunde en sterrenkunde	of Onderzoek
of Toegepaste wiskunde	of Economie & verzekeringen
Masterproef (30 ECTS)	**Keuzevakken** (30 ECTS)
Tweede masterjaar	≥18 ECTS wiskundevakken

De gekozen minor bereidt voor op de arbeidsmarkt. Door de minor onderwijs kan de hele theoretische component van de lerarenopleiding in het masterprogramma worden opgenomen. De minor onderzoek staat voor verdiepende specialisatie en laat toe vakken te kiezen uit de lijst links op de pagina. De minor economie en verzekeringen omvat het voorbereidingsprogramma tot de master Actuariële wetenschappen.

Meer weten?

- www.UGent.be
- www.wiskunde.UGent.be
- PRIME.UGent.be



UNIVERSITEIT GENT

www.wiskunde.UGent.be

2. Product van cosinussen

Willem Pranger BSc., Universiteit Utrecht

(a) Laat $0 < x < \pi$ een reëel getal zijn en definieer

$$A_n = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{8}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

voor elk natuurlijk getal n. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} A_n$ bestaat en gelijk is aan $\frac{\sin(x)}{x}$. Met andere woorden, er geldt dat

$$\frac{\sin(x)}{x} = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{8}\right) \cdots .$$

(b) Gebruik bovenstaand resultaat om Vièta's formule aan te tonen:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots = \frac{2}{\pi}.$$

Uitwerking.

(a) Met de verdubbelingsformule $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ voor de sinus volgt

$$\begin{aligned}\sin(x) &= 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 4\sin(x/4)\cos(x/4)\cos(x/2) = \dots \\ &= 2^n \sin(x/2^n)\cos(x/2^n)\cdots\cos(x/4)\cos(x/2)\end{aligned}$$

voor elke $n \geq 1$. Als we delen door $2^n \sin(x/2^n)$ dan vinden we dat

$$\frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{x/2^n}{\sin(x/2^n)} = \cos(x/2^n)\cdots\cos(x/4)\cos(x/2) = \frac{\sin(x/2^n)}{x/2^n} = A_n.$$

Omdat $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)}{x}$ en $\lim_{n\to\infty} \frac{x/2^n}{\sin(x/2^n)} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin(u)} = 1$ beiden bestaan (die laatste wegens de standaardlimiet $\lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$, of met behulp van L'Hôptial), geldt wegens de productregel dat $\lim_{n\to\infty} A_n$ bestaat en gelijk is aan $\frac{\sin(x)}{x} \cdot 1 = \frac{\sin(x)}{x}$, zoals gevraagd.

(b) We nemen $x = \frac{\pi}{2}$ in de formule van onderdeel (a). Dan is de linkerkant gelijk aan $\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$. Om de rechterkant te berekenen merken we op dat $\cos(x/2) = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Verder geldt wegens de verdubbelingsformule voor de cosinus, $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$, dat $\cos(t) = \sqrt{\frac{\cos(2t)+1}{2}} = \frac{\sqrt{2\cos(2t)+2}}{2}$, waarmee we met inductie vinden dat de n-de factor in het product precies gelijk is aan $\cos(x/2^n)$ voor $x = \frac{\pi}{2}$. □

De eerste identiteit is ontdekt door Leonhard Euler, de tweede door François Vièta. Hij publiceerde dit reeds in 1593, wat 114 jaar is voordat Euler werd geboren.

3. Driehoeken tellen

Ir. Harold de Boer, Transtrend BV

Zij $N \geq 3$ een geheel getal. Op de middelbare school wordt onderwezen dat je, gebruikmakend van drie van de hoekpunten van een regelmatige N-hoek, $\binom{N}{3}$ verschillende driehoeken kunt tekenen. Maar hoe verschillend zijn die driehoeken eigenlijk? Als we alle congruente driehoeken als gelijk beschouwen, dan blijft er van die $\binom{4}{3} = 4$ driehoeken in een vierkant maar één verschillende over. In een regelmatige vijfhoek zitten slechts twee verschillende, en in een regelmatige zeshoek slechts drie.

Hoe groot is het verschil tussen het aantal verschillende driehoeken in een regelmatige 2016-hoek en het aantal verschillende driehoeken in een regelmatige 2015-hoek?

Uitwerking.
Bij het zoeken van congruente driehoeken kunnen we ons concentreren op rotaties en spiegelingen van eenzelfde driehoek.

We kunnen nu elke driehoek dus beschrijven door een drietal niet-negatieve gehele getallen (a, b, c) met $a + b + c = N - 3$ en $a \leq b \leq c$ waarbij a, b en c slaan op het aantal punten op de N-hoek tussen twee hoekpunten van de driehoek. Het volstaat dus het aantal zulke drietallen te tellen.

Bekijk nu een drietal (a, b, c) met $0 \leq a \leq b \leq c$ en $a + b + c = 2012 = 2015 - 3$ dan geldt dat $(a, b, c + 1)$ een drietal is met $a \leq b \leq c + 1$ en $a + b + (c + 1) = 2013 = 2016 - 3$ en bovendien wordt elk drietal (x, y, z) met $x + y + z = 2013$ en $x \leq y < z$ op deze manier verkregen vanuit het drietal $(x, y, z - 1)$. Het verschil tussen het aantal drietallen voor $N = 2016$ en $N = 2015$ is dus gelijk aan het aantal drietallen (x, y, y) met $x + 2y = 2013$ en $0 \leq x \leq y$. Dit aantal drietallen is eenvoudig te tellen door op te merken dat $2y \leq 2013$, oftewel $y \leq \lfloor \frac{2013}{2} \rfloor = 1006$ en $2013 = x + 2y \leq 3y$, dus $y \geq \frac{2013}{3} = 671$. Omdat bij elke $671 \leq y \leq 1006$ er een unieke x, namelijk $2013 - 2y$, hoort en deze ook aan de gevraagde eisen voldoet, geldt dat het antwoord op de vraag gelijk is aan $1006 - 671 + 1 = 336$. $\square$

Alternatieve uitwerking.
We zullen hieronder afleiden dat het aantal verschillende driehoeken in een regelmatige N-hoek gelijk is aan $\frac{N^2}{12}$ als $6 \mid N$ en aan $\frac{N^2-1}{12}$ als $2 \nmid N$ en $3 \nmid N$. Als N een veelvoud is van 6, dus bijvoorbeeld $N = 2016$, is het verschil tussen het aantal driehoeken in een regelmatige N-hoek en het aantal driehoeken in een regelmatige $(N - 1)$-hoek gelijk aan

$$\frac{N^2}{12} - \frac{(N-1)^2 - 1}{12} = \frac{N}{6},$$

wat voor $N = 2016$ gelijk is aan 336.

Als in de eerste oplossingen zien we dat we enkel hoeven te letten op rotaties en spiegelingen van eenzelfde driehoek. We beschouwen de driehoeken waarvan één van de hoekpunten een vast punt A op de N-hoek is. (Alle andere driehoeken zijn een rotatie daarvan.) Voor de beide andere hoekpunten houden we dan nog $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$ verschillende mogelijkheden over. Maar dan is er nog steeds sprake van dubbeltelling.

Het aantal eenzelfde driehoeken dat we kunnen tekenen waarbij A één van de hoekpunten is hangt af van de vorm van de driehoek. Als de driehoek gelijkzijdig is is er maar 1 mogelijkheid en bovendien kan dit enkel als $3 \mid N$. Met andere gelijkbenige driehoeken zijn er 3 manieren; één waarbij A de tophoek is en twee gespiegelde situaties waarbij A één van de basishoeken is. Met driehoeken die niet gelijkbenig zijn zijn er zelfs 6 manieren: het punt A kan elk van de drie hoeken zijn en bij elke situatie horen twee (gespiegelde) driehoeken.

Stel nu dat $6 \mid N$. Dan bestaat er één gelijkzijdige driehoek en nog $\frac{N-4}{2}$ gelijkbenige driehoeken, waarbij we dat laatste vinden door de driehoeken te tellen aan de hand van de situatie waarbij A de tophoek is. In totaal vinden we dus

$$\frac{(N-1)(N-2)}{2} - 1 - 3\frac{N-4}{2} = \frac{N^2 - 6N + 12}{2}$$

niet-gelijkbenige driehoeken, dus in totaal zijn er in dit geval

$$1 + \frac{N-4}{2} + \frac{N^2 - 6N + 12}{12} = \frac{N^2}{12}$$

verschillende driehoeken.

Als $2 \nmid N$ en $3 \nmid N$ dan vinden we geen gelijkzijdige driehoek en $\frac{N-1}{2}$ gelijkbenige driehoeken, wederom door ze te tellen aan de hand van de situatie met A als tophoek. In totaal vinden we dus $\frac{(N-1)(N-2)}{2} - 3\frac{N-1}{2} = \frac{(N-1)(N-5)}{2}$ niet-gelijkbenige driehoeken, dus nu vinden we inderdaad

$$\frac{N-1}{2} + \frac{(N-1)(N-5)}{12} = \frac{N^2-1}{12}$$

verschillende driehoeken. □

4. Ondubbelzinnige functies

Josse van Dobben de Bruyn BSc., Universiteit Leiden

Voor functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wordt met het kwadraat f^2 soms het puntsgewijs product $f \cdot f$ bedoeld, gegeven door $x \mapsto f(x) \cdot f(x)$, maar soms ook de samenstelling $f \circ f$ gegeven door $x \mapsto f(f(x))$. Functies waarvoor deze twee kwadraten overeenkomen noemen we *ondubbelzinnig.*

(a) Bestaat er een ondubbelzinnige functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die strikt dalend en continu is?

(b) Bestaat er een ondubbelzinnige functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die strikt stijgend en continu is?

(c) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een ondubbelzinnige functie zo dat f^2 continu is. Is f noodzakelijkerwijs continu?

Uitwerking.
Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is ondubbelzinnig dan en slechts dan als $f|_{f(\mathbb{R})}$ overeenkomt met de functie $x \mapsto x^2$. Hierbij bedoelen we met $f(\mathbb{R})$ het beeld van f en met $f|_{f(\mathbb{R})}$ bedoelen we de restrictie verkregen door het domein van f te beperken tot $f(\mathbb{R})$; dit is dus de functie $f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gegeven door $x \mapsto f(x)$. Met deze karakterisering in ons achterhoofd kunnen we de deelvragen oplossen.

(a) Nee. Zij $B = f(\mathbb{R})$ het beeld van f. Omdat f strikt dalend is, is S een oneindige verzameling. Voor $b \in B$ geldt $f(b) = b^2$ vanwege bovenstaande opmerking. Zo zien we dat voor alle $b \in B$ ook $b^2 \in B$ geldt, dus B bevat oneindig veel positieve getallen. In het bijzonder kunnen we dus $x, y \in B$ kiezen met $0 < x < y$. Nu geldt $f(x) = x^2 < y^2 = f(y)$, maar dit is in tegenspraak met het gegeven dat f strikt dalend is.

(b) Ja. Beschouw de volgende functie:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 2e^{x-2} & \text{als } x \leq 2; \\ x^2 & \text{als } x > 2. \end{cases}$$

Deze functie is duidelijk continu op $(-\infty, 2)$ en $(2, \infty)$. De functie is bovendien continu in $x = 2$ omdat $2 + 2e^{2-2} = 2^2$ geldt. Elk van de twee delen van de functie is strikt stijgend, dus f is strikt stijgend; voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ met $x < 2 < y$ geldt immers ook $f(x) < f(2) < f(y)$. Het is eenvoudig in te zien dat f ondubbelzinnig is. Het beeld van f is namelijk $f(\mathbb{R}) = (2, \infty)$ en we zien dat $f|_{f(\mathbb{R})}$ overeenkomt met de functie $x \mapsto x^2$.

(c) Nee. Beschouw het volgende tegenvoorbeeld: laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in \{-1, 1\}; \\ -1 & \text{als } x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}. \end{cases}$$

Nu geldt $f(\mathbb{R}) = \{-1, 1\}$ en we zien dat $f|_{f(\mathbb{R})}$ overeenkomt met de functie $x \mapsto x^2$. Daaruit volgt dat f ondubbelzinnig is. Bovendien is f^2 gelijk aan de functie $x \mapsto 1$, dus in het bijzonder is f^2 continu. Daarentegen is f duidelijk niet continu. □

Katholieke Universiteit Leuven

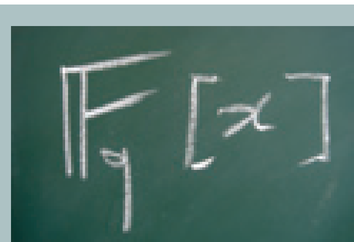
De K.U.Leuven, gesticht in 1425, is de oudste universiteit van de lage landen. Meer dan 4.500 onderzoekers zijn er actief in wetenschappelijk onderzoek en onderwijs. Op 1 februari 2006 telde de K.U.Leuven in totaal 31.447 ingeschreven studenten. Van de ingeschreven studenten heeft ongeveer 88% de Belgische nationaliteit, terwijl 6% een andere EU-nationaliteit heeft en nog eens 6% van buiten de EU komt. Dit maakt van de gezellige provinciehoofdstad Leuven een bruisende studentenstad met een rijk sociocultureel aanbod.

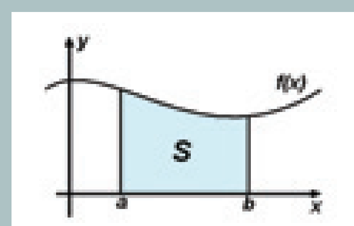
Onderzoek aan het Departement Wiskunde

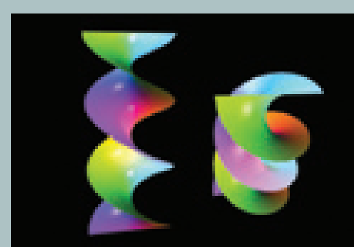
Het onderzoek aan het departement Wiskunde is georganiseerd op het niveau van de onderzoeksafdelingen:

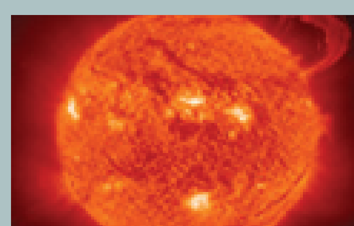
- Afdeling Algebra: het onderzoek situeert zich in de algebraïsche meetkunde, getaltheorie, algebraïsche topologie en groepentheorie.
- Afdeling Analyse: in deze afdeling doet men onderzoek in de klassieke analyse (reële en complexe analyse) en in de functionaalanalyse.
- Afdeling Meetkunde: het onderzoek is gecentreerd rond differentiaalmeetkunde, in het bijzonder Riemannse en pseudo-Riemannse meetkunde en deelvariëteiten.
- Afdeling Plasma-astrofysica: het onderzoeksdomein van deze afdeling is de wiskunde van vloeistoffen en plasma's, het voornaamste studieobject is de zon. Dit onderzoek is gesitueerd in de toegepaste en computationele wiskunde.
- Afdeling Statistiek: deze afdeling is actief in de wiskundige statistiek, in het bijzonder de theorie van extreme waarden, robuuste statistiek en niet-parametrische methoden. Ook stochastische processen en financiële wiskunde komen aan bod. De afdeling is bovendien ook actief in toegepaste consultatie voor bedrijven.

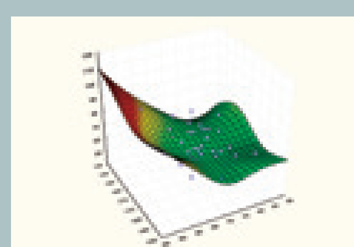
Meer info op http://wis.kuleuven.be











5. Begincijfers van machten

Prof. dr. Jaap Top, Rijksuniversiteit Groningen

Deze opgave gaat over het eerste getal in de decimale ontwikkeling van natuurlijke getallen. Elk natuurlijk getal n heeft een unieke schrijfwijze in de vorm $n = 10^m a_m + \ldots + 10a_1 + a_0$, waarbij $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ en $a_m \neq 0$. We schrijven $\langle n \rangle = a_m$. Er geldt bijvoorbeeld $\langle 5 \rangle = 5$, $\langle 5^2 \rangle = 2$ en $\langle 5^3 \rangle = 1$. Voor elk niet-negatief geheel getal n definiëren we het geordende drietal $v_n = (\langle 2^n \rangle, \langle 4^n \rangle, \langle 5^n \rangle)$.

(a) Zij n een niet-negatief geheel getal. Bewijs dat uit $v_n = v_0$ volgt dat $n = 0$ en dat uit $v_n = v_1$ volgt dat $n = 1$.

(b) Bestaat er een positief geheel getal n zo dat v_n uit drie dezelfde getallen bestaat?

Uitwerking.

(a) Merk op dat $v_0 = (1, 1, 1)$. Als $v_n = v_0$ geldt er dus dat $\langle 2^n \rangle = \langle 5^n \rangle = 1$, hetgeen betekent dat gehele getallen $k, \ell \geq 0$ zijn zodat $10^k \leq 2^n < 2 \cdot 10^k$ en $10^\ell \leq 5^n < 2 \cdot 10^\ell$. Er volgt dat $10^{k+\ell} \leq 10^n < 4 \cdot 10^{k+\ell} < 10^{k+\ell+1}$, dus er moet gelijkheid gelden in de eerste ongelijkheid. Dat betekent in het bijzonder dat $10^k = 2^n$, waaruit meteen volgt dat $n = 0$ (vergelijk de priemfactorisaties van beide kanten).

Er geldt $v_1 = (2, 4, 5)$. Als $v_n = v_1$ geldt er dus dat $\langle 2^n \rangle = 2$ en $\langle 5^n \rangle = 5$. Er zijn dan gehele $k, \ell \geq 0$ zodat $2 \cdot 10^k \leq 2^n < 3 \cdot 10^k$ en $5 \cdot 10^\ell \leq 5^n < 6 \cdot 10^\ell$. Vermenigvuldigen geeft nu dat $10^{k+\ell+1} \leq 10^n < 18 \cdot 10^{k+\ell} < 10^{k+\ell+2}$. Er moet dus weer gelijkheid in de eerste ongelijkheid gelden, wat in het bijzonder betekent dat $2 \cdot 10^k = 2^n$. Dit herschrijft tot $10^k = 2^{n-1}$, dus $n - 1 = 0$ en $n = 1$.

Merk op dat we bij (a) het eerste cijfer van 4^n dus nog niet nodig hadden.

(b) Het antwoord is nee. Veronderstel dat er wel een natuurlijk getal n bestaat met $v_n = (b, b, b)$ voor zekere $b \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. We mogen aannemen dat $b > 1$, want het geval $b = 1$ is bij (a) al afgehandeld. Laat $k, \ell \geq 0$ geheel zijn met $b \cdot 10^k \leq 2^n < (b+1) \cdot 10^k$ en $b \cdot 10^\ell \leq 5^n < (b+1) \cdot 10^\ell$. Vermenigvuldigen geeft dat $b^2 \cdot 10^{k+\ell} \leq 10^n < (b+1)^2 10^{k+\ell}$. Aangezien $b^2 > 1$ volgt $n > \ell + k$. Aangezien $(b+1)^2 \leq 100$ volgt $n < k + \ell + 2$. Er moet dus gelden dat $n = k + \ell + 1$. We zien nu dat $b^2 \leq 10 < (b+1)^2$, dus $b = 3$. Uit $3 \cdot 10^k \leq 2^n < 4 \cdot 10^k$ volgt dat $9 \cdot 10^{2k} \leq 4^n < 16 \cdot 10^{2k} < 2 \cdot 10^{2k+1}$. Dit betekent dat $\langle 4^n \rangle = 9$ of $\langle 4^n \rangle = 1$, dus $\langle 4^n \rangle$ is niet gelijk aan $3 = b$. Deze tegenspraak laat zien dat zo'n n niet bestaat. $\square$

De website http://mathworld.wolfram.com schrijft dit probleem toe aan I.M. Gelfand.

6. Fermat modulo Fermat

Prof. dr. Hendrik Lenstra, Universiteit Leiden

Voor een geheel getal $n \geq 1$ schrijven we $F_n = 2^{2^n} + 1$ voor het n-de Fermat-getal. Zij k een positief geheel getal. Bewijs dat er een positief geheel getal m bestaat zodat $F_k^m \equiv 1 \mod F_{k+1}$. Bepaal bovendien de kleinste m met deze eigenschap.

Uitwerking.
We gaan bewijzen dat $m = 2^{k+3}$ de genoemde eigenschap heeft, en tevens minimaal is. Schrijf $u = 1 + 2^k$. Dan geldt

$$F_k^2 = 2^{2^{k+1}} + 2 \cdot 2^{2^k} + 1 = F_{k+1} + 2^u \equiv 2^u \mod F_{k+1}.$$

Wegens $k > 0$ is u oneven, dus voor $m = 2^{k+3}$ geldt

$$F_k^{m/2} = (F_k^2)^{2^{k+1}} \equiv 2^{u \cdot 2^{k+1}} = (F_{k+1} - 1)^u \equiv (-1)^u = -1 \mod F_{k+1},$$

en $F_k^m \equiv (-1)^2 = 1 \mod F_{k+1}$. Dit bewijst dat m de genoemde eigenschap heeft. Wat we hebben bewezen, kunnen we ook uitdrukken door te zeggen dat de restklasse $(F_k \bmod F_{k+1})$ in de multiplicatieve groep $(\mathbb{Z}/F_{k+1}\mathbb{Z})^*$ ligt en daar een orde heeft die een deler van $m = 2^{k+3}$ is. We hebben ook bewezen $F_k^{m/2} \equiv -1 \mod F_{k+1}$, en wegens $-1 \not\equiv 1 \mod F_{k+1}$ volgt daaruit dat die orde geen deler van $m/2$ is. Maar omdat m een tweemacht is, is de enige deler van m die geen deler van $m/2$ is, gelijk aan m zelf. Dus de betreffende orde is gelijk aan m, wat een andere manier is om te zeggen dat m het kleinste positieve gehele getal met $F_k^m \equiv 1 \mod F_{k+1}$ is. $\square$

7. Divergente reeksen

Dr. Fokko van de Bult, Technische Universiteit Delft

Wedstrijdtip: lees de inleiding na de wedstrijd. De echte opgave begint bij de geletterde delen.

Inleiding: Een onderwerp dat aan bod komt in het eerste jaar van de studie wiskunde is de convergentie van reeksen $\sum a_n$. We leren allemaal toetsen om te zien wanneer de reeks convergeert, vaak onder de conditie $a_n \geq 0$. Het idee is dat de reeks convergeert als de termen "snel genoeg" klein worden. Wat we bedoelen met snel genoeg is moeilijk om precies te maken. Je zou je kunnen afvragen of er een soort randgeval is: een divergente reeks $\sum a_n$ zodat voor elke divergente reeks $\sum b_n$ er geldt dat $b_n \geq a_n$. Dat dit niet gaat werken is echter meteen duidelijk door te kijken naar de divergente reeksen $1 + 0 + 1 + 0 + 1 + \cdots$ en $0 + 1 + 0 + 1 + 0 + \cdots$, omdat elke rij die kleiner is dan beide rijen uit alleen maar nullen moet bestaan. Daarom kijken we nu naar rijen b_n die nog een extra conditie hebben die ze mooi maakt, om te kijken hoever we dan kunnen komen.

(a) Gegeven is een niet-stijgende rij (a_n) van positieve termen (oftewel $a_n > 0$ en $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \geq 1$). Laat zien dat er een niet-stijgende rij (b_n) van positieve termen bestaat zo dat $\sum b_n$ divergeert en er bovendien oneindig veel $N \in \mathbb{N}$ bestaan met $b_N \leq a_N$.

(b) Een rij (c_n) noemen we convex als voor alle $1 \leq n < k < m$ de ongelijkheid

$$\frac{c_m - c_k}{m - k} \geq \frac{c_k - c_n}{k - n}$$

geldt. Bekijk een niet-stijgende, convexe rij (a_n) van positieve termen. Laat zien dat er een niet-stijgende, convexe rij (b_n) van positieve termen bestaat zo dat $\sum b_n$ divergeert en er oneindig veel N bestaan met $b_N \leq a_N$.

(c) Een rij (c_n) van positieve termen noemen we log-convex als $(\log(c_n))$ een convexe rij is. Laat zien dat er een niet-stijgende, log-convexe rij (a_n) van positieve termen is, zo dat voor elke divergente reeks $\sum b_n$ met (b_n) positief, niet-stijgend en log-convex er een constante $C > 0$ is met $b_n \geq C a_n$ voor alle n. (Hint: De reeks $\sum a_n$ hoeft zelf niet te divergeren.)

Merk op dat de rijen $(1/n^p)$ positief, niet-stijgend en log-convex zijn voor $p > 0$; we beschouwen dus heel natuurlijk voorkomende condities.

In deze opgave wordt met een rij (a_n) een oneindige rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bestaande uit reële getallen bedoeld.

Uitwerking.

(a) Gegeven de rij a_n kiezen we b_n recursief op de volgende manier. We beginnen met $m_0 = 1$ en kiezen dan recursief

1. Kies $b_{m_i} = a_{m_i}$ en kies m_{i+1} zo dat $(m_{i+1} - m_i)b_{m_i} \geq 1$.
2. Kies vervolgens $b_k = b_{m_i}$ voor $m_i \leq k < m_{i+1}$.

Dan geldt steeds dat $\sum_{n=m_i}^{m_{i+1}-1} b_n = (m_{i+1} - m_i)b_{m_i} \geq 1$. Dus we krijgen

$$\sum_{n=1}^{m_k-1} b_n = \sum_{n=1}^{m_1-1} b_n + \sum_{n=m_1}^{m_2-1} b_n + \cdots + \sum_{n=m_{k-1}}^{m_k-1} b_n \geq 1 + 1 + \cdots + 1 = k.$$

We concluderen dat $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{m_k-1} b_n = \infty$ en dus divergeert de reeks $\sum b_n$. Bovendien geldt steeds $b_{m_i} \leq a_{m_i}$ voor alle i, dus dat gebeurt oneindig vaak. Merk op dat omdat a_n een niet-stijgende rij is, we ook hebben dat $b_{m_i} \geq b_{m_{i+1}}$ en daarom is b_n ook een niet-stijgende rij.

(b) Gegeven de rij a_n kiezen we b_n weer recursief, maar iets lastiger. We beginnen weer met $m_0 = 1$ en vervolgens

1. Kies $b_{m_i} = a_{m_i}$ en kies m_{i+1} zo dat $(m_{i+1} - m_i)b_{m_i} \geq 1$.
2. Kies vervolgens $b_k = \frac{m_{i+1}-k}{b_{m_{i+1}}-b_{m_i}} b_{m_i} + \frac{k-m_i}{m_{i+1}-m_i} b_{m_{i+1}}$ voor $m_i \leq k < m_{i+1}$.

Dan geldt dat b_n een convexe niet-stijgende rij positieve getallen is: positief en niet-stijgend is direct duidelijk. De rij is ook convex: Op elk stuk tussen de m_i'de term en m_{i+1}'ste term is de rij lineair. Bovendien merken we op dat de richtingscoefficient bij elk volgend stuk steeds minder negatief wordt (wegens convexiteit van de rij a_n), en dus is de rij convex. Verder is

$$\sum_{k=m_i}^{m_{i+1}-1} b_k = \text{gemiddelde} \cdot \text{lengte} \geq \frac{b_{m_i} + b_{m_{i+1}}}{2} \cdot (m_{i+1} - m_i) \geq \frac{1}{2} b_{m_i}(m_{i+1} - m_i) \geq \frac{1}{2}.$$

We concluderen dat

$$\sum_{n=1}^{m_k-1} b_n = \sum_{n=1}^{m_1-1} b_n + \sum_{n=m_1}^{m_2-1} b_n + \cdots + \sum_{n=m_{k-1}}^{m_k-1} b_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}k.$$

Derhalve divergeert ook deze reeks. Ten slotte geldt weer dat $b_{m_i} \leq a_{m_i}$.

(c) Neem een meetkundige rij als a_n, bijvoorbeeld $a_n = 1/e^n$. Als $b_n \leq a_n$ en $b_m \leq a_m$ volgt dat $\log(b_n) \leq -n$ en $\log(b_m) \leq -m$, dus uit log-convexiteit volgt $\log(b_k) \leq -k$ voor $n \leq k \leq m$. Als we dus een rij b_n hebben zodat $b_n \leq a_n$ oneindig vaak, en $b_N \leq a_N$ dan is $b_n \leq a_n$ voor alle $n \geq N$. Er volgt dat de reeks $\sum b_n$ convergeert (omdat de reeks $\sum a_n$ convergeert als meetkundige reeks). Stel nu dat $\sum b_n$ divergeert, dan is $b_n \leq a_n$ maar eindig vaak, en kunnen we $C = \min_n \frac{b_n}{a_n}$ kiezen omdat b_n/a_n maar eindig vaak onder de 1 komt (als b_n/a_n nooit kleiner is dan 1 kunnen we $C = 1$ kiezen). Voor deze C geldt vervolgens dat $b_n \geq Ca_n$. $\square$

Maastricht University
Leading in Learning!

Master Operations Research

Department of Knowledge Engineering

Operations Research is de studie waarin je leert hoe je wiskunde kunt gebruiken om de beste keuzes te maken. Dat kan gaan om klassieke problemen als het bepalen van de kortste route tussen twee punten of om de ideale verdeling van taken over een aantal teamleden. Je leert bijvoorbeeld ook om specifieke hartproblemen te detecteren op basis van een hartfilmpje, om afwijkende structuren in DNA sequenties te ontdekken, om de beste keuzes te bepalen onder strategische omstandigheden, of om stabiliteitsvraagstukken in dynamische evolutionaire processen te beantwoorden.

In de Maastrichtse master Operations Research komen deze en gerelateerde vraagstukken aan de orde. Met je bachelor wiskunde of econometrie ben je hierop prima voorbereid.

Wil je meer weten? Come check us out!
Bezoek een Open Dag!

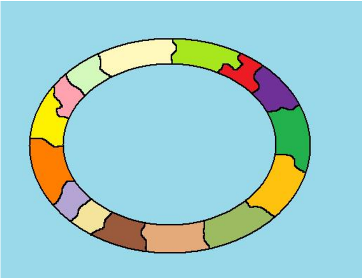
Kijk op: www.maastrichtuniversity.nl/dke/operationsresearch
Of neem contact op met: info-dke@maastrichtuniversity.nl
Betrokken onderzoeksgroepen:
https://project.dke.maastrichtuniversity.nl/nso
https://project.dke.maastrichtuniversity.nl/bmi

www.maastrichtuniversity.nl/dke

8. Kaarten kleuren

Sjoerd Boersma, Universiteit Utrecht

Gegeven is een continent, genaamd Romerika, met daarop een eindig aantal, minstens 3, landen. Het continent is omgeven door een oceaan, en midden in het continent ligt een groot meer. De landen bestaan elk uit één stuk en grenzen zowel aan de oceaan als aan het meer. Het gevolg is dat elk land aan precies twee andere landen grenst en ze gezamenlijk in een rondje liggen. Een voorbeeld is te zien in figuur 8.1.



Figuur 8.1: Een mogelijk continent Romerika.

(a) Er geldt dat sommige landen op Romerika met elkaar *bevriend* zijn, waarbij elk land met hooguit één ander land bevriend is. Bovendien zijn aangrenzende landen nooit bevriend. Cartografen krijgen de opdracht de landen van Romerika te kleuren, waarbij aangrenzende landen verschillende kleuren moeten krijgen. Verder moeten ze ervoor zorgen dat elke twee bevriende landen dezelfde kleur krijgen. Het is hierbij niet erg als er nog meer landen zijn die ook deze kleur krijgen. Wat is het minimum aantal kleuren waarmee dit altijd mogelijk is?

(b) Beantwoord dezelfde vraag als er nu hele groepen van bevriende landen kunnen zijn, waarbij elke groep een grootte van hooguit n heeft. Hierbij is $n \geq 2$ een natuurlijk getal, moeten alle landen in dezelfde groep wederom dezelfde kleur krijgen en geldt nog steeds dat in elke groep geen twee landen aangrenzend zijn.

(c) Stel nu dat er tussen twee landen een kanaal wordt gegraven dat het meer en de oceaan verbindt. Het gevolg hiervan is dat de landen aan weerszijden van het kanaal niet meer aangrenzend zijn. Deze landen grenzen nu dus nog maar aan precies één ander land, terwijl alle andere landen nog steeds aan precies twee landen grenzen. Beantwoord vragen (a) en (b) voor deze nieuwe situatie. Merk op dat de twee landen aan weerszijden van het kanaal nu bevriend kunnen zijn.

Uitwerking.

(a) We merken op dat 5 kleuren altijd voldoende is. Immers, we kunnen de landen één voor één gaan kleuren, waarbij we paren bevriende landen altijd meteen na elkaar kleuren. In elke stap zijn er dan hooguit vier kleuren die dit land/deze twee landen niet mogen krijgen, omdat elk land exact twee buren heeft. Dit betekent dat we met 5 kleuren altijd een kleur over hebben om de volgende stap te doen.

We geven nu een situatie waarbij 5 kleuren ook echt noodzakelijk zijn. Stel dat er 10 landen zijn, verdeeld in 5 paren bevriende landen, die op de volgende manier op de cirkel liggen:

$$1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4$$

Hierbij zijn landen met hetzelfde getal bevriend en geldt dat aangrenzende getal aangrenzende landen voorstellen. Merk op dat ook de 1 helemaal links grenst aan de 4 helemaal rechts. We zien nu dat elk getal éénmaal naast elke ander getal staat, dus geen twee verschillende getallen kunnen dezelfde kleur krijgen. Dit betekent dat er inderdaad minstens 5 kleuren nodig zijn.

(b) We gebruiken dezelfde aanpak als hierboven, namelijk het één voor één kleuren van de landen. In elke stap zijn er dan hooguit $n \cdot 2 = 2n$ beperkingen, dus met $2n+1$ kleuren lukt het ook altijd.

Om te laten zien dat $2n+1$ kleuren soms ook noodzakelijk is voldoet het om analoog aan hierboven een voorbeeld te geven. We nemen aan dat er $n(2n+1)$ landen zijn, verdeeld in $2n+1$ groepen van n landen. Dan willen we analoog aan onderdeel (a) de getallen 1 tot en met $2n+1$ op een cirkel zetten, waarbij elk getal precies n keer voorkomt en bovendien elk getal precies eenmaal naast een ander getal staat.

We bewijzen dit met inductie, waarbij voor $n = 2$ al een voorbeeld is gegeven. Stel nu dat we een voorbeeld hebben voor een zekere $n = m$, dan kunnen we op de volgende manier een voorbeeld construeren voor $n = m + 1$. Bekijk een voorbeeld voor $n = m$ en voeg het getal $2m + 2$ toe tussen de 1 en de 2, tussen de 3 en de 4, ... en tussen de $2m + 1$ en de 1. Voeg bovendien het getal $2m + 3$ toe tussen de 2 en de 3, tussen de 4 en de 5, ... en tussen de $2m + 2$ en de 1 (dit laatste kan op twee manieren). De nieuwe rij voldoet dan bijna aan alle eisen, behalve dat de getallen 1 tot en met $2m + 1$ allen eenmaal te weinig voorkomen en er nergens een 1 naast een 2, nergens een 2 naast een 3, ... en nergens een $2m + 1$ naast een 1 staat. Dit kunnen we oplossen door een van de énen op de cirkel te vervangen door de reeks $1, 2, 3, \ldots, 2m + 1, 1$. Dit voltooit de inductiestap.

(c) We doen meteen het algemene geval met groepsgrootte hooguit n. We claimen dat het antwoord nu gelijk is aan $2n$. Voor een situatie waarbij minstens $2n$ kleuren zijn bekijken we het voorbeeld van (b), waarbij het kanaal gegraven is tussen het land $2n+1$ waarmee we eindigden en het land 1 waarmee we begonnen. Dan geldt voor alle $1 \leq i, j \leq 2n$ met $i \neq j$ dat er een land uit groep i bestaat die grenst aan een land uit groep j, dus er zijn inderdaad minstens $2n$ kleuren nodig.

Om aan te tonen dat dit voldoende is gebruiken we het volgende algoritme. We nemen aan dat er N landen zijn en nummeren de landen $1, 2, \ldots, N$, beginnend vanaf het kanaal en zodanig dat voor $2 \leq i \leq N - 1$ land i grenst aan de landen $i \pm 1$. De groepen bevriende landen kunnen we nu weergeven door middel van verzamelingen $B_1, \ldots, B_k \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ waarbij elke B_i hooguit n elementen heeft (één element mag ook). Schrijf $b_i = \max B_i$ dan nemen we zonder verlies van algemeenheid aan dat $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$. We kleuren nu eerst de elementen uit B_1, dan die uit B_2, etcetera en ten slotte de elementen uit B_k. Stel dat we op een gegeven moment de landen uit B_i kleuren dan geldt dat elk van de hooguit n landen aan hooguit 2 reeds gekleurde landen grenst, maar wegens de extra eis volgt dat het land met het grootste getal slechts aan hooguit 1 al gekleurd land grenst. Dit betekent dat er hooguit $2(n - 1) + 1 = 2n - 1$ kleuren zijn die we niet mogen gebruiken, dus $2n$ kleuren is voldoende. $\square$

9. Inverteerbare matrices

Dr. Michiel Hochstenbach, Technische Universiteit Eindhoven

Zij $n \geq 2$ een geheel getal. Voor een reële $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ definiëren we $r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$ voor alle $1 \leq i \leq n$.

(a) Neem aan dat $|a_{ii}| > r_i$ voor alle $1 \leq i \leq n$. Bewijs dat A inverteerbaar is.

(b) Neem aan dat $|a_{ii}| \cdot |a_{jj}| > r_i \cdot r_j$ voor alle $1 \leq i < j \leq n$. Bewijs dat A inverteerbaar is.

(c) Laat $k \geq 3$ een geheel getal zijn. Bewijs dat er een $n \geq k$ en een niet-inverteerbare matrix $n \times n$-matrix A bestaan zo dat

$$|a_{i_1 i_1}| \cdots |a_{i_k i_k}| > r_{i_1} \cdots r_{i_k}$$

voor alle $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$.

Uitwerking.

(a) Stel dat A niet inverteerbaar is, dan bestaat er een niet-triviale lineaire relatie tussen de kolommen van A. Oftewel, er bestaan reële getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ niet allen 0 met

$$\lambda_1 a_{i1} + \ldots + \lambda_n a_{in} = 0$$

voor alle $1 \leq i \leq n$. Kies nu $1 \leq i \leq n$ met $|\lambda_i|$ maximaal, dan geldt dat

$$|\lambda_i a_{ii}| = \left| -\sum_{j \neq i} \lambda_j a_{ij} \right| \leq \sum_{j \neq i} |\lambda_j||a_{ij}| \leq \sum_{j \neq i} |\lambda_i||a_{ij}| = |\lambda_i| r_i < |\lambda_i a_{ii}|.$$

Deze tegenspraak toont aan dat A inverteerbaar is.

(b) Als $|a_{ii}| > r_i$ voor alle $1 \leq i \leq n$ dan zijn we in de situatie van onderdeel (a), dus we nemen zonder verlies van algemeenheid aan dat $|a_{11}| \leq r_1$. Wegens de voorwaarde volgt nu dat $|a_{ii}| > r_i$ voor $2 \leq i \leq n$. Stel dat A niet inverteerbaar is, dan kunnen we net als in onderdeel (a) getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vinden. Als er een $2 \leq i \leq n$ bestaat met $|\lambda_i| \geq |\lambda_j|$ voor alle $1 \leq j \leq n$, dan geldt hetzelfde bewijs als hierboven, dus we vinden dat $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ voor alle $2 \leq i \leq n$. Zij $2 \leq i \leq n$ zo dat $|\lambda_i|$ maximaal is onder de overige waarden. Als $\lambda_i = 0$ dan geldt $\lambda_j = 0$ voor $2 \leq j \leq n$ dus uit $0 = \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_n a_{1n}$ en $\lambda_1 \neq 0$ volgt nu dat a_{11} is nul, maar dan kan niet aan de gegeven voorwaarde worden voldaan. Er geldt dus dat $|\lambda_i| > 0$ en verder

$$|\lambda_1 a_{11}| = \left| -\sum_{j \neq 1} \lambda_j a_{1j} \right| \leq \sum_{j \neq 1} |\lambda_j||a_{1j}| \leq \sum_{j \neq i} |\lambda_i||a_{1j}| = |\lambda_i| r_1,$$

dus $|\lambda_1| \leq |\lambda_i| \frac{r_1}{|a_{11}|} < |\lambda_i| \frac{|a_{ii}|}{r_i}$. Analoog aan eerder vinden we nu ten slotte de volgende tegenspraak

$$|\lambda_i a_{ii}| \leq |\lambda_1| r_i < |\lambda_i| \frac{|a_{ii}|}{r_i} \cdot r_i = |\lambda_i a_{ii}|.$$

(c) We nemen $n = k$ en kiezen de volgende matrix

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline O & I_{k-2} \end{array}\right)$$

waarbij $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, O tweemaal de nulmatrix voorstelt (eenmaal met afmetingen $2 \times (k-2)$ en eenmaal met afmetingen $(k-2) \times 2$) en I_{k-2} de $(k-2) \times (k-2)$-identiteitsmatrix is. De matrix A is zeker niet inverteerbaar, aangezien de eerste twee rijen gelijk zijn aan elkaar. Het enige k-tal getallen $(i_1, \ldots, i_k)$ dat aan de eisen uit de vraag voldoet is $(i_1, \ldots, i_k) = (1, \ldots, k)$. Wegens $a_{ii} = 1$ voor alle $1 \leq i \leq k$ en $r_i = 0$ voor $i \geq 3$ geldt dat

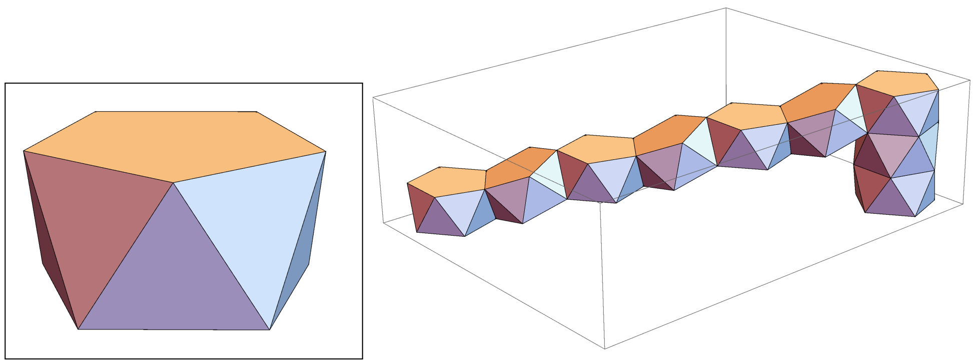
$$|a_{11}| \cdots |a_{kk}| = 1 \cdots 1 = 1 > 0 = r_1 \cdots r_k,$$

dus de gegeven matrix A voldoet aan de voorwaarden. $\square$

10. Antiprisma's stapelen

Dr. ir. Tom Verhoeff, Technische Universiteit Eindhoven

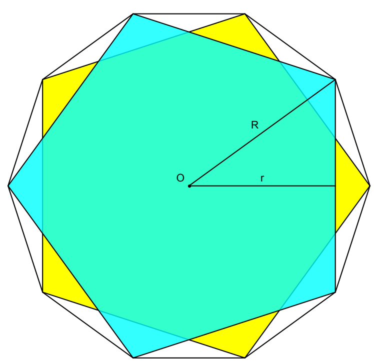
Zij $n \geq 3$ een oneven geheel getal en beschouw het antiprisma dat we krijgen door twee regelmatige n-hoeken middels $2n$ gelijkzijdige driehoeken te verbinden tot een veelvlak (zie links in figuur 10.1). Deze antiprisma's zijn via diagonaal overliggende driehoeken te koppelen tot een zigzagketen, en via de n-hoeken te stapelen tot een toren (zie rechts in figuur 10.1).



Figuur 10.1: Vijfhoekig antiprisma (links); zigzagketen en stapel ervan (rechts)

Bewijs, voor elke oneven $n \geq 3$, dat de diagonale keten van zeven zulke antiprisma's precies net zo hoog komt als een stapel van drie antiprisma's.

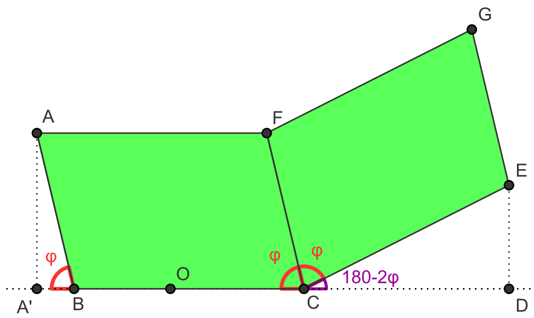
Uitwerking.
We mogen ervan uitgaan dat de regelmatige n-hoeken zijdelengte 1 hebben. De straal van de in- en omgeschreven cirkel van de regelmatige n-hoek noemen we respectievelijk r en R (zie figuur 10.2). Omdat de zijdelengte 1 is, volgt uit het toepassen van de stelling van Pythagoras dat $r^2 + \frac{1}{4} = R^2$.



Figuur 10.2: Bovenaanzicht van vijfhoekig antiprisma

Als we het antiprisma doorsnijden door twee overliggende hoekpunten en het centrum, krijgen we een parallellogram. Dit parallellogram heeft als hoekpunten twee hoekpunten van het antiprisma alsmede twee middens van overliggende zijden. Dit parallellogram is in figuur 10.3 weergegeven, waarbij A een hoekpunt is van het eerste antiprisma en F het midden van de tegenoverliggende zijde. We merken op dat F tevens het midden is van een zijde van het volgende antiprisma. Het tegenoverliggende hoekpunt in dat antiprisma noemen we G. Het midden van de zijde onder A heet B; het tegenoverliggende hoekpunt in het eerste antiprisma heet C. Het midden van de zijde tegenover C in het tweede antiprisma (de zijde onder G)

heet E. Als we de hoogte van één antiprisma h noemen, is het nu voldoende om te laten zien dat E op hoogte $\frac{2h}{3}$ ligt; oftewel dat $|DE| = \frac{2h}{3}$. Dan komen we met een keten van zeven antiprisma's immers op hoogte $3 \cdot \frac{2h}{3} = 2h$, dezelfde hoogte die we bereiken door 3 antiprisma's te stapelen.



Figuur 10.3: Zijaanzichten van twee opeenvolgende antiprisma's

In figuur 10.3 is de basishoek van de parallellogrammen aangegeven met ϕ. We merken op dat de lange zijde van elk parallellogram gelijk is aan $R+r$, want er geldt $|BO| = r$ en $|CO| = R$. In driehoek $\triangle AA'B$ geldt verder dat $|AA'| = h$, $|A'B| = R - r$ en $|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ omdat $|AB|$ de hoogte is van een gelijkzijdige driehoek met zijdelengte 1. We kunnen nu gebruikmaken van de rechthoekige driehoeken $\triangle CDE$ en $\triangle AA'B$ om $|DE|$ uit te rekenen: er geldt

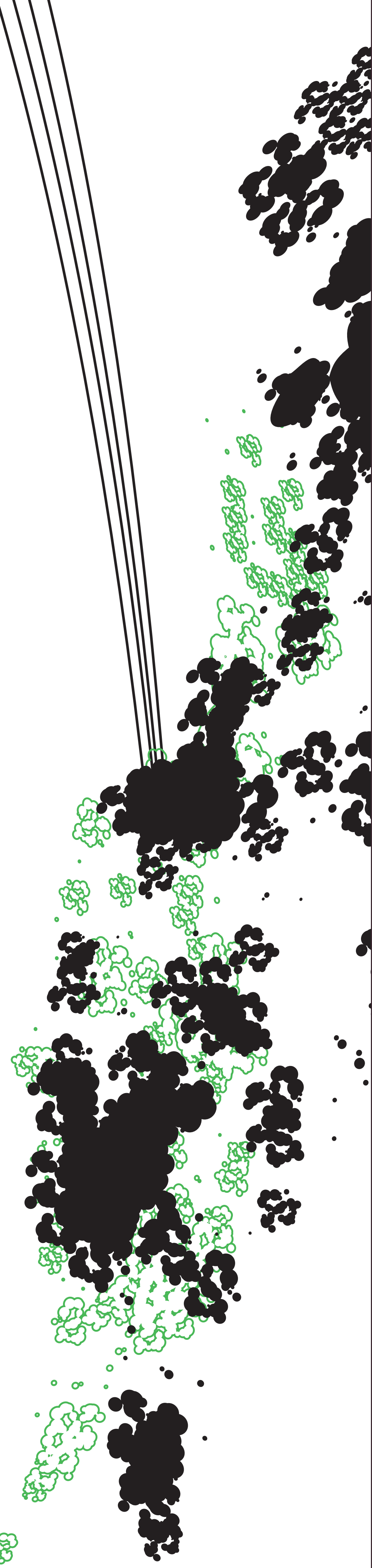
$$\begin{aligned} |DE| &= |CE| \sin(180^\circ - 2\varphi) \\ &= (R+r)\sin(2\phi) \\ &= 2(R+r)\sin(\phi)\cos(\phi) \\ &= 2(R+r) \cdot \frac{h}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \cdot \frac{R-r}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2h}{3} \cdot \frac{(R+r)(R-r)}{\frac{1}{4}} = \frac{2h}{3}, \end{aligned}$$

omdat we eerder al hadden gezien dat $(R+r)(R-r) = R^2 - r^2 = \frac{1}{4}$. $\square$

Enkele sculpturen van kunstenaar Melle Stoel zijn op het resultaat van deze opgave gebaseerd.

Figuur 10.4: Sculptuur van vijfhoekige antiprisma's ontworpen door Melle Stoel

Voor meer informatie zie `http://archive.bridgesmathart.org/2014/bridges2014-285.html`.



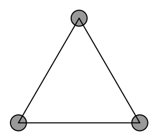
11. Toevallige oriëntaties van grafen

dr. Moritz Schauer, dr. Christos Pelekis en Richard Kraaij MSc.
Universiteit van Amsterdam, Katholieke Universiteit Leuven en Technische Universiteit Delft

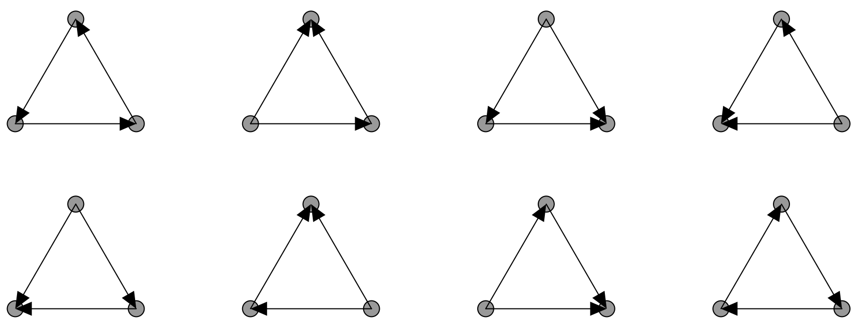
We bekijken een enkelvoudige, samenhangende graaf G met d knopen en m zijden. Door voor elke zijde onafhankelijk een eerlijke munt op te gooien, kiezen we een richting voor elk van de zijden. Op deze manier krijgen we een gerichte graaf G'. Het aantal knopen waar een even aantal zijden naar wijst noemen we $E(G')$. Wat is de kansverdeling die $E(G')$ volgt?

Hint: het blijkt dat de kansverdeling te beschrijven is in termen van m en d.

Ter voorbeeld: bekijk het geval waarin G een graaf is met 3 knopen en alledrie de mogelijke zijden:



Bij deze graaf horen 8 mogelijke grafen G':



Omdat voor twee van deze grafen G' geldt dat $E(G') = 0$ en voor de andere zes grafen geldt dat $E(G') = 2$, vinden we in dit voorbeeld de volgende kansverdeling:

$$\mathbb{P}\left(E(G') = k\right) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{voor } k = 0, \\ \frac{3}{4} & \text{voor } k = 2, \\ 0 & \text{voor andere waarden van } k. \end{cases}$$

Een enkelvoudige graaf bestaat uit een (eindige) verzameling knopen en een verzameling zijden, waarbij elke zijde twee verschillende knopen verbindt. Tussen twee knopen loopt hoogstens één zijde. In een gerichte graaf hebben de zijden een richting. Een (ongerichte) graaf noemen we samenhangend als er tussen elk tweetal knopen een pad is dat bestaat uit zijden van de graaf.

Uitwerking.
Antwoord: Er geldt dat $E(G')$ de binomiale verdeling met parameters d en $\frac{1}{2}$ volgt, waarbij we ons beperken tot de uitkomsten die dezelfde pariteit hebben als $m - d$. Met andere woorden, voor $0 \leq k \leq d$ geldt

$$\mathbb{P}\left(E(G') = k\right) = \begin{cases} \frac{\binom{d}{k}}{2^{d-1}} & \text{als } k \equiv m - d \mod 2; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

We kleuren na het kiezen van een oriëntatie telkens de knopen waar een even aantal zijden naar wijst groen. We gaan eerst laten zien dat $E(G')$, het aantal groene knopen, altijd dezelfde pariteit heeft als $m-d$. Nummer de knopen $v_1, \ldots, v_d$ en noteer het aantal zijden dat in G' naar v_i wijst met n_i. Dan geldt $n_1 + \cdots + n_d = m$, want we tellen links iedere zijde van G precies één keer. Aan de linkerkant staan d getallen waarvan er $E(G')$ even zijn. Als we de gelijkheid modulo 2 bekijken zien we dus dat $d - E(G') \equiv m \mod 2$ oftewel $E(G') \equiv m - d \mod 2$. In het bijzonder zien we dat $P(E(G') = k) = 0$ wanneer k niet dezelfde pariteit heeft als $m-d$.

We bewijzen nu eerst het volgende lemma.

Lemma. Zij T een boom met knopen $t_1, \ldots, t_d$ en zij S een deelverzameling van $\{t_1, \ldots, t_d\}$ met een oneven aantal elementen. Dan is er precies één manier om de zijden van T te oriënteren zodat voor de gerichte graaf T' die we dan krijgen geldt dat de knopen uit S precies de groene knopen zijn.

Bewijs. We laten eerst zien dat dit op minstens één manier kan. Kies hiertoe de nummering $t_1, \ldots, t_d$ zodanig dat voor $1 \leq i \leq d-1$ geldt dat er precies één knoop uit $\{t_{i+1}, \ldots, t_d\}$ is waar t_i mee verbonden is (het is eenvoudig met inductie te bewijzen dat dit kan). Kies vervolgens voor $1 \leq i \leq d-1$ de oriëntatie van de zijde tussen t_i en deze knoop, zeg t_j, op zo'n manier dat t_i groen wordt als $t_i \in S$ en dat t_i niet groen wordt als $t_i \notin S$ (omdat t_i niet verbonden is met de knopen anders dan t_j die in het rijtje $t_1, \ldots, t_d$ voorkomen, bepaalt de oriëntatie van de zijde tussen t_i en t_j of t_i groen wordt of niet). Dan voldoen $t_1, \ldots, t_{d-1}$ aan de gevraagde voorwaarde. Omdat het totaal aantal groene knopen oneven is (voor een boom met d knopen geldt $m = d-1$, dus $m - d = -1$ is oneven), geldt voor t_d ook dat $t_d \in S$ als en alleen als t_d groen is. Voor iedere van de 2^{d-1} mogelijke deelverzamelingen S van $\{t_1, \ldots, t_d\}$ met een oneven aantal elementen, is er dus een oriëntatie van de zijden te kiezen met de gevraagde eigenschap. Omdat er in totaal ook $2^m = 2^{d-1}$ oriëntaties mogelijk zijn, moet er voor iedere S precies één zodanige oriëntatie zijn. $\diamondsuit$

We laten nu zien dat als $k \equiv m - d \mod 2$ dat dan geldt $\mathbb{P}(E(G') = k) = \frac{\binom{d}{k}}{2^{d-1}}$. Omdat er 2^m mogelijke oriëntaties van de zijden zijn, die allemaal met gelijke kans voorkomen, komt dit er op neer om te bewijzen dat er $2^{m-d+1}\binom{d}{k}$ manieren zijn om de zijden te oriënteren zodat er k groene knopen zijn. We zullen iets sterkers bewijzen, namelijk dat voor iedere deelverzameling S van $\{v_1, \ldots, v_d\}$ met k elementen geldt dat er 2^{m-d+1} manieren zijn om de zijden te oriënteren zodat de knopen uit S de groene knopen zijn. Hieruit volgt dan het gevraagde resultaat omdat er $\binom{d}{k}$ manieren zijn om een deelverzameling S van $\{v_1, \ldots, v_d\}$ met k elementen te kiezen.

Kies een deelverzameling S en kies een opspannende boom T van G (een deelgraaf van G die een boom is en alle knopen van G bevat). Zij H de deelgraaf van G die alle knopen van G bevat en de zijden die niet in T zitten. Gegeven een oriëntatie van de zijden van H laten we B de verzameling knopen zijn die in H' groen zijn, dus waar een even aantal zijden van H naar wijst. We kunnen op 2^{m-d+1} manieren de $m - (d-1)$ zijden in H te oriënteren. Er geldt verder dat $|B| \equiv (m - d + 1) - d \equiv m + 1 \mod 2$. Er zijn in totaal d knopen, en er geldt $|S| \equiv m - d \mod 2$. Zij $U = (S \cap B) \cup (S^c \cap B^c)$, oftewel de verzameling knopen die in zowel S als B zitten, of juist zowel niet in S als niet in B zitten.

Dan geldt

$$\begin{aligned}|U| = |S\cap B| + |S^c\cap B^c| &\equiv |S\cap B| + |S^c\cap B| + |S^c\cap B| + |S^c\cap B^c|\\ &= |B| + |S^c| \equiv |B| + d - |S| \equiv m+1+d-(m-d) \equiv 1 \mod 2\end{aligned}$$

dus U heeft een oneven aantal elementen. De oriëntaties van de zijden in T zo kiezen dat (in G') precies de knopen in S groen worden, komt op hetzelfde neer als de oriëntaties van de zijden in T zo te kiezen dat (in T') precies de knopen in U groen worden. Volgens het lemma kan dit op precies één manier. Voor elk van de 2^{m-d+1} mogelijke oriëntaties van de zijden buiten T is er dus precies één manier om de oriëntaties van de zijden binnen T zo te kiezen dat S de verzameling is van groene knopen. Er zijn dus in totaal precies 2^{m-d+1} oriëntaties van de zijden van G met deze eigenschap, zoals te bewijzen was. □

12. Een deelruimte van niet-inverteerbare matrices

Daniël Kroes BSc., Universiteit Utrecht

Wat is de grootst mogelijke dimensie van een lineaire deelruimte van de vectorruimte van reële $n \times n$-matrices die enkel niet-inverteerbare matrices bevat?

Uitwerking.
De gevraagde waarde is $n(n-1)$. Een voorbeeld van een vectorruimte die aan de eisen voldoet is de ruimte van matrices waarvoor de laatste rij uit enkel nullen bestaat en deze deelruimte heeft duidelijk dimensie $n(n-1)$.

Stel nu dat er een deelruimte V bestaat met $\dim(V) \geq n(n-1)+1$, die enkel uit niet-inverteerbare matrices bestaat. Zij E_{ij} de $n \times n$-matrix met in rij i en kolom j een 1 en voor de rest nullen, dan geldt dat $\mathcal{B} = \{E_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n\}$ een basis van de ruimte van $n \times n$-matrices is. Uit de lineaire algebra weten we dat we Gauss-eliminatie kunnen uitvoeren, waardoor we vinden dat er een basis $\mathcal{V}$ van V bestaat waarvoor de matrix van deze basis ten opzichte van $\mathcal{B}$ in rijgereduceerde vorm staat. Dit houdt in dat er $\dim(V)$ paren (i,j) bestaan waarvoor de coëfficiënt van E_{ij} voor exact één van de elementen van $\mathcal{V}$ gelijk is aan 1 en voor de overige elementen aan 0.

In dit geval betekent dit dus dat we elke matrix uit V kunnen krijgen door $\dim(V)$ matrixelementen vrij te kiezen en dat de overige $n^2 - \dim(V)$ matrixelementen hieruit volgen. Met inductie naar n bewijzen we dat als N een geheel getal is met $N \geq n(n-1)+1$ en we N matrixelementen vrij kunnen kiezen, dat we dezen zo kunnen kiezen dat de resulterende matrix A voldoet aan $\det(A) = \pm 1 \neq 0$.

Inductiebasis: Voor $n = 2$ geldt dat er een diagonaal bestaat waarop we beide elementen kunnen kiezen, dus we kiezen deze matrixelementen gelijk aan 1. Op de overige diagonaal kunnen we nog minstens 1 element kiezen en door deze gelijk te nemen aan 0 volgt dat de determinant van de resulterende matrix inderdaad gelijk is aan ± 1.

Inductiestap: Stel dat het bewezen is voor een zekere $m \geq 2$ en bekijk nu $n = m+1$. Als $N = n^2$ kiezen we de identiteitsmatrix, dus neem aan dat dit niet zo is. Uit $N \geq n(n-1)+1$ volgt dat er een rij bestaat waarin we alle elementen vrij kunnen kiezen, want anders zou gelden dat $n^2 - N \geq n$, oftewel $N \leq n(n-1)$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat dit de eerste rij is. Kies nu een kolom i zo dat één van de matrixelementen die we *niet* vrij mogen kiezen in deze kolom ligt. Door nu in de eerste rij in kolom i een 1 te plaatsen en alle overige getallen in deze rij gelijk te kiezen aan 0 kunnen we ontwikkelen naar de eerste rij en vinden we dat $\det(A) = \pm\det(B)$ waarbij B de matrix is waarbij de eerste rij en de i-de kolom zijn verwijderd. In deze nieuwe matrix B zijn er hooguit $(n^2 - N) - 1$ elementen die we niet vrij kunnen kiezen dus we kunnen minstens

$$N' = m^2 - (n^2 - N - 1) = m^2 - (m+1)^2 + N + 1 \geq -2m - 1 + (m+1)m + 1 + 1 = m(m-1) + 1$$

elementen in B vrij kiezen. Wegens de inductiehypothese kunnen we er voor zorgen dat $\det(B) = \pm 1$, dus er geldt ook dat $\det(A) = \pm 1$. $\square$