1. Drie relaties

Prof. dr. H. W. (Hendrik) Lenstra
Universiteit Leiden

Laat X een eindige verzameling zijn. Als $\sim$ een equivalentierelatie op X is, geven we met $X/\sim$ de verzameling equivalentieklassen van $\sim$ aan.
Laten nu $\simeq$ en $\cong$ twee equivalentierelaties op X zijn. Definieer de relatie $\sim$ op X door $x \sim y$ dan en slechts dan als er een eindige rij $x_1, \ldots, x_n$ elementen van X is zodanig dat $x = x_1$, $x_n = y$, $x_i \simeq x_{i+1}$ voor oneven i, en $x_i \cong x_{i+1}$ voor even i. Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie op X is, en dat geldt

$$\#X + \#(X/\sim) \geq \#(X/\simeq) + \#(X/\cong).$$

Uitwerking.
Het is duidelijk dat $\sim$ een equivalentierelatie is. Om de ongelijkheid te bewijzen, beschouwen we de vectorruimte $\mathbb{R}^X$ van alle reëelwaardige functies op X. Deze heeft dimensie $\#X$. We kunnen $\mathbb{R}^{X/\simeq}$ identificeren met de deelruimte van $\mathbb{R}^X$ bestaande uit de functies $X \to \mathbb{R}$ die via de natuurlijke afbeelding $X \to X/\simeq$ factorizeren, en analoog voor $\mathbb{R}^{X/\cong}$. Men gaat gemakkelijk na dat $\mathbb{R}^{X/\simeq} \cap \mathbb{R}^{X/\cong}$ geïdentificeerd kan worden met $\mathbb{R}^{X/\sim}$, dus de verlangde ongelijkheid volgt nu met lineaire algebra:

$$\dim \mathbb{R}^X \geq \dim(\mathbb{R}^{X/\simeq} + \mathbb{R}^{X/\cong}) = \dim \mathbb{R}^{X/\simeq} + \dim \mathbb{R}^{X/\cong} - \dim \mathbb{R}^{X/\sim}.$$

Een ander bewijs maakt gebruikt van een bos (een graaf zonder cykels) waarvan X de verzameling knopen is, en dat de eigenschap heeft dat twee knopen x en y voldoen aan $x \simeq y$ dan en slechts dan als x en y verbonden zijn door een pad in het bos. Zo'n bos krijgt men door in elke equivalentieklasse van $\simeq$ een boom te kiezen, dus het aantal kanten van het bos is gelijk aan $\#X - \#(X/\simeq)$. Kies ook zo'n bos voor $\cong$. Als men dat eveneens voor $\sim$ wil doen, dan is het voldoende een maximaal bos te nemen in de vereniging van beide gekozen bossen. Daar wordt het totaal aantal kanten niet groter van, dus

$$\#X - \#(X/\sim) \leq (\#X - \#(X/\simeq)) + (\#X - \#(X/\cong)).$$

2. Deelruimteoverdekking

dr. R. (Raymond) van Bommel
Johannes-Gutenberg Universität Mainz

1. **(3 pt)** Zij V een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Stel dat $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, waarbij $V_i \subseteq V$ voor elke $i = 1, \ldots, n$ een deelruimte van V is. Bewijs dat er een i is met $V_i = V$.

2. **(4 pt)** Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte over $\mathbb{R}$. Stel dat $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, waarbij $V_i \subseteq V$ voor elke $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ een deelruimte van V is. Bewijs dat er een i is met $V_i = V$.

3. **(3 pt)** Geldt het resultaat uit onderdeel (2) ook als we de eis dat V eindig-dimensionaal is weglaten?

Uitwerking.

1. We bewijzen de stelling uit het ongerijmde. Stel dat $V_i \subsetneq V$ voor alle $i = 1, \ldots, n$. We mogen aannemen dat $V_1 \not\subset \bigcup_{i=2}^{n} V_i$, anders hadden we V_1 net zo goed weg kunnen laten uit onze lijst. Zij $v \in V_1$ een vector zodat $v \notin V_i$ voor alle $i = 2, \ldots, n$ en zij $w \in V \setminus V_1$ een willekeurige vector (die bestaat vanwege de aanname dat $V_1 \neq V$). We bekijken de vectoren $v + r \cdot w$ voor $r \in \mathbb{R}^*$. Deze liggen allemaal niet in V_1. Daarom zijn er twee $v + r_1 \cdot w$ en $v + r_2 \cdot w$, met $r_1 \neq r_2$, die in dezelfde V_i liggen voor zekere $i \neq 2$. In het bijzonder geldt dan dat zowel v als w in V_i liggen, wat in tegenspraak is met onze aanname over v.

2. We bewijzen de stelling met inductie naar $\dim V$. Als $\dim V = 0$, dan is de stelling triviaal. Voor de inductiestap werken we uit het ongerijmde. Stel $\dim V > 0$ en $V_i \neq V$ voor alle $i = 1, 2, \ldots$. De vectorruimte V bevat oneindig veel deelruimtes van dimensie $\dim V - 1$ (voor elke lineaire vergelijking één). Bekijk zo'n deelruimte $W \subset V$. Definieer nu $W_i = V_i \cap W$. Er geldt nu dat $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ en dus dat $W_i = W$ voor zekere i. Maar dan geldt ook dat $W \subset V_i$ en dus $W = V_i$, aangezien $V_i \neq V$. Er zijn echter overaftelbaar veel zulke deelruimtes en maar aftelbaar veel V_i. We vinden dus een tegenspraak.

3. In het algemeen is dit niet waar. De vectorruimte van polynomen $\mathbb{R}[X]$ is de vereniging van de deelruimtes V_i, waarbij V_i de deelruimte van polynomen van graad hooguit i is.

3. Op zoek naar een functie

P. (Pjotr) Buys MSc.
Universiteit van Amsterdam

We zoeken een differentiëerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan de volgende eisen:

- $f(0) = 0$.
- Er is een $c \in \mathbb{R}_{>0}$ zodat $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$.
- De functie $xf'(x)$ is niet-dalend, dat wil zeggen $xf'(x) \geq yf'(y)$ voor alle reële getallen $x \geq y$.

Bestaat er zo'n functie?

Uitwerking.
Het antwoord is nee. Stel dat f aan de eisen voldoet. Omdat $\lim_{x\to\infty} f(x) > 0$ bestaat er een $x > 0$ zodat $f(x) > 0$. Volgens de middelwaardestelling is er een $\xi \in (0, x)$ met $f'(\xi) > \frac{f(x)-f(0)}{x-0} > 0$. Schrijf $C = \xi f'(\xi) > 0$. Dan geldt voor $y > \xi$ dat $yf'(y) \geq C$ of $f'(y) \geq C/y$. Met de hoofdstelling van de calculus volgt dat voor $y > \xi$ geldt

$$f(y) \geq f(\xi) + \int_\xi^y \frac{C}{x} dx = f(\xi) + C\log(y) - C\log(\xi).$$

Maar de rechterkant gaat naar oneindig als $y \to \infty$, wat een tegenspraak is met het feit dat $\lim_{y\to\infty} f(y) = c$. Dus zo'n functie f kan niet bestaan.

4. Met weinig rondkomen

M. (Merlijn) Staps MSc.
Princeton University

Gegeven zijn gehele getallen $a, b > 1$ met $\text{ggd}(a, b) = 1$. Bepaal het kleinste gehele getal $n > 1$ zodat het mogelijk is om de getallen 1, 2, ..., n in een cirkel te plaatsen, op zo'n manier dat elke twee getallen die naast elkaar staan a of b van elkaar verschillen.

Uitwerking.
De kleinst mogelijke n is $n = a + b$.
We bewijzen eerst dat $n \geq a + b$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $a < b$. De buren van het getal 1 moeten $a + 1$ en $b + 1$ zijn, dus het getal a komt ook in de cirkel voor. De buren van dit getal kunnen niet kleiner dan a zijn, dus dit moeten $a + a$ en $a + b$ zijn. In het bijzonder komt $a + b$ voor, dus $n \geq a + b$.
We laten nu zien dat $n = a+b$ inderdaad mogelijk is. Plaats de resten van a, $2a$, ..., $(a+b)a$ bij deling door $a + b$ in een cirkel. We beweren dat elk van de getallen 0, 1, ..., $a + b - 1$ precies één keer voorkomt. Het is daartoe voldoende om te laten zien dat ia en ja voor $i < j$ nooit dezelfde rest geven bij deling door $a+b$. Dit bewijzen we uit het ongerijmde. Stel dat ia en ja dezelfde rest geven, dan is $ja - ia = (j - i)a$ deelbaar door $a + b$. Omdat $\text{ggd}(a, b) = 1$ geldt ook dat $\text{ggd}(a, a + b) = 1$, dus hieruit volgt dat $j - i$ deelbaar is door $a + b$. Maar $0 < j - i < a + b$, dus dat kan niet. Elk van de getallen 0, 1, ..., $a + b - 1$ komt dus precies één keer voor. We laten nu zien dat opeenvolgende getallen a of b van elkaar verschillen. Bekijk hiertoe de resten van ia en $(i + 1)a$ bij deling door $a + b$. Als tussen ia en $(i + 1)a$ geen veelvoud van $a + b$ ligt, verschillen hun resten bij deling door $a + b$ precies a van elkaar. Als er wel een veelvoud van $a + b$ tussen ia en $(i + 1)a$ ligt, zeg $k(a + b)$, dan geeft ia rest $ia - (k - 1)(a + b)$ bij deling door $a + b$ terwijl $(i + 1)a$ rest $(i + 1)a - k(a + b)$ geeft bij deling door a. Het verschil tussen deze twee getallen is $ia - (k - 1)(a + b) - (i + 1)a + k(a + b) = b$. We zien dat elke twee aangrenzende getallen verschil a of b hebben (dit gaat ook goed voor de resten van $(a + b)a$ en a bij deling door $a + b$, want die zijn respectievelijk 0 en a). Het is dus mogelijk om de getallen 0, 1, ..., $a + b - 1$ rond een cirkel te plaatsen zodat aangrenzende getallen a of b van elkaar verschillen. Als we nu elk getal met 1 verhogen, zien we dat het mogelijk is om de getallen 1, 2, ..., $a + b$ in een cirkel te plaatsen zodat elke twee getallen die naast elkaar staan verschil a of b hebben. Dus $n = a + b$ is inderdaad mogelijk.

5. Geheeltallige punten

dr. S. R. (Sander) Dahmen
Vrije Universiteit Amsterdam

1. **(2 pt)** Zij $p \geq 3$ een priemgetal, $x \in \mathbb{Z}$ en neem aan dat $p \mid x^2 + 1$. Laat zien dat $p \equiv 1 \pmod 4$.

2. **(8 pt)** Vind alle $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ zodat
$$x^2 = y^3 + 2y^2 - 4y - 1.$$

Uitwerking.

1. Dit kan op verschillende manieren gedaan worden, bijvoorbeeld met elementaire groepentheorie als volgt:

   We bewijzen eerst dat $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ cyclisch is. Omdat p priem is, is $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ een domein, dus $X^d - 1$ heeft hooguit d oplossingen voor $d \mid p - 1$. Dus $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ heeft hooguit d elementen van orde d voor alle $d \mid p - 1$. Dus als $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ niet cyclisch is, volgt dat er een priemgetal q en een ondergroep $H \subseteq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ is met $H \cong (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$, maar dat geeft q^2 elementen van orde q. Tegenspraak, dus $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ is cyclisch van orde $p - 1$.

   Omdat $p \mid x^2 + 1$, heeft $\overline{x}$ orde 4 in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Dus uit de stelling van Lagrance volgt dat 4 de orde van $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ deelt, i. e. $4 \mid p - 1$, wat per definitie equivalent is aan $p \equiv 1 \pmod 4$.

2. De oplossingen zijn $(x, y) = (\pm 2, -1)$. Dit kan men als volgt inzien:

   Stel dat (x, y) voldoet aan de vergelijking. Reduceren we modulo 4 dan zien we dat $y \equiv -1 \pmod 4$. We onderscheiden twee gevallen:

   Stel $y > 0$. Tellen we 1 op aan beide kanten van de vergelijking, dan zien we naar factoriseren dat
   $$x^2 + 1 = y(y^2 + 2y - 4).$$
   Samen met $y \equiv -1 \pmod 4$, zien we vanwege unieke factorisatie dat $p \mid y$ voor een priemgetal $p \geq 3$, met $p \equiv -1 \pmod 4$. Maar dan ook $p \mid x^2 + 1$, wat een tegenspraak geeft met (1).

   Stel $y < 0$. Aangezien $y(y^2 + 2y - 4) = y\big((y + 1)^2 - 5\big) > 0$, zien we dat $y > -4$. Samen met $y \equiv -1 \pmod 4$ laat dat enkel de mogelijkheid $y = -1$. Invullen in de vergelijking geeft inderdaad de oplossingen $x = \pm 2$.

6. Kirkmans Schoolmeisjesprobleem

S. (Sven) Polak MSc
Universiteit van Amsterdam

In deze vraag bekijken we een variant van een klassiek combinatorisch probleem.[1]

Verdeel 15 meisjes gedurende 7 (week)dagen iedere dag in ten hoogste 5 groepen, zo dat iedere twee meisjes op ten hoogste één dag in dezelfde groep zitten. (6.1)

Hier zie je een voorbeeld van een oplossing voor (6.1).

	Ma	Di	Wo	Do	Vr	Za	Zo
meisje 1	A	A	A	A	A	A	A
meisje 2	A	B	B	B	B	B	B
meisje 3	A	C	C	C	C	C	C
meisje 4	B	A	C	B	D	D	D
meisje 5	B	B	A	C	E	E	E
meisje 6	B	D	D	D	A	C	B
meisje 7	C	A	E	D	C	B	E
meisje 8	C	B	D	E	D	A	C
meisje 9	C	E	B	A	E	C	D
meisje 10	D	C	B	E	A	D	E
meisje 11	D	D	E	C	B	A	D
meisje 12	D	E	D	B	C	E	A
meisje 13	E	C	E	A	D	E	B
meisje 14	E	D	C	E	E	B	A
meisje 15	E	E	A	D	B	D	C

Tabel 1: Een voorbeeld van een oplossing voor (6.1). Iedere dag nummeren we de groepen met `A`, `B`, `C`, `D` en `E`.

(a) **(7 pt)** Bewijs dat in elke oplossing voor (6.1):

i) Iedere twee meisjes op *precies* een dag in dezelfde groep zitten.
ii) Iedere dag iedere groep grootte 3 heeft.

(b) **(3 pt)** Stel dat een oplossing voor (6.1) gegeven is. Het Schoolhoofd arriveert. Op elk van de 7 dagen wordt het Schoolhoofd aan één van de bestaande 5 groepen meisjes toegevoegd, zo dat elk van de 15 meisjes op een *even* aantal dagen in dezelfde groep zit als het Schoolhoofd.

Bewijs dat dit niet kan.

Uitwerking.

(a) We nummeren de groepen iedere dag van 1 tot en met 5, de dagen van 1 tot en met 7 en de meisjes van 1 tot en met 15. We schrijven $c_{i,j}$ voor de grootte van groep i op dag j ($i = 1, \dots, 5$ en $j = 1, \dots, 7$). Definieer, voor $x, y \in \{1, \dots, 15\}$ (met $x \neq y$),

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{als meisjes } x \text{ en } y \text{ in dezelfde groep zitten op één van de 7 dagen,} \\ 0 & \text{als meisjes } x \text{ en } y \text{ op geen enkele dag in dezelfde groep zitten.} \end{cases}$$

[1] Het oorspronkelijke probleem staat bekend als *Kirkmans schoolmeisjesprobleem*, een vraag gesteld door Thomas P. Kirkman in 1850.

Dan geldt

$$105 = \binom{15}{2} \geq \sum_{\substack{\{x,y\}\subseteq\{1,\dots,15\} \\ x\neq y}} f(x,y) = \sum_{j=1}^{7}\sum_{i=1}^{5}\binom{c_{i,j}}{2}. \tag{6.2}$$

Hier hebben we de gelijkheid verkregen door het totaal aantal keer dat er een tweetal meisjes in één groep zit op twee manieren te tellen.

Voor iedere $j \in \{1,\dots,7\}$ geldt $\sum_{i=1}^{5} c_{i,j} = 15$. Dus voor iedere j geldt vanwege Cauchy-Schwarz

$$15^2 = \left(\sum_{i=1}^{5} c_{i,j}\right)^2 \leq 5 \cdot \sum_{i=1}^{5} c_{i,j}^2,$$

dus $\sum_{i=1}^{5} c_{i,j}^2 \geq 45$ voor iedere j, dus $\sum_{i=1}^{5} \binom{c_{i,j}}{2} \geq 30/2 = 15$ voor iedere j.

Dus de meest rechtse term in (6.2) is groter dan of gelijk aan $7 \cdot 15 = 105 = \binom{15}{2}$ (en dat is ook de meest linkse term). Dus er geldt gelijkheid in (6.2) en dus $\sum_{i=1}^{5} \binom{c_{i,j}}{2} = 15$ voor iedere j en $f(x,y) = 1$ voor *alle* paren $\{x,y\} \subseteq \{1,\dots,15\}$ (met $x \neq y$). Dit bewijst i).[2]

Nu bewijzen we dat $c_{i,j} = 3$ voor iedere i,j. Zij $j \in \{1,\dots,7\}$ willekeurig gekozen. We hadden al gezien dat $\sum_{i=1}^{5} \binom{c_{i,j}}{2} = 15$ (en natuurlijk ook $\sum_{i=1}^{5} c_{i,j} = 15$), dus $\sum_{i=1}^{5} c_{i,j}^2 = 45$. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $c_{1,j} \geq c_{2,j} \geq \dots \geq c_{5,j}$, anders verwisselen we de nummers van de groepen op dag j. Schrijf $a := c_{1,j}$. Dan geldt (weer vanwege Cauchy-Schwarz)

$$\sum_{i=1}^{5} c_{i,j}^2 = a^2 + \tfrac{1}{4} \cdot 4 \sum_{i=2}^{5} c_{i,j}^2 \geq a^2 + \tfrac{1}{4}\left(\sum_{i=2}^{5} c_{i,j}\right)^2 = a^2 + \tfrac{1}{4}(15-a)^2.$$

Voor $a \geq 4$ is $a^2 + \frac{1}{4}(15-a)^2 > 45$, tegenspraak. Dus $c_{i,j} \leq 3$ voor alle i. Dus $c_{i,j} = 3$ voor alle i. Omdat j willekeurig gekozen was, geldt $c_{i,j} = 3$ voor alle i,j. Dit bewijst ii).

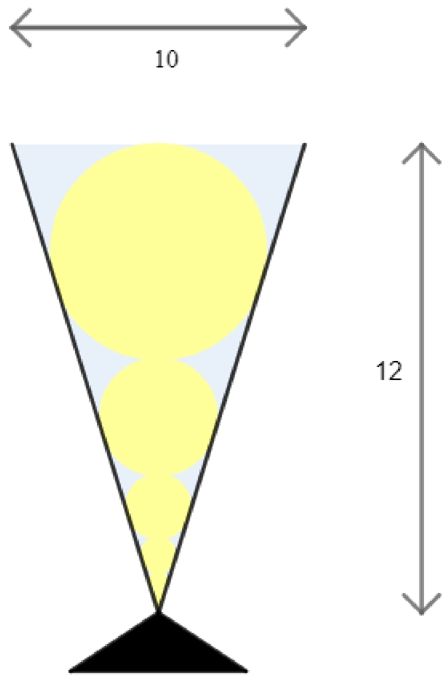
(b) Nummer de groepen iedere dag met `A`, `B`, `C`, `D` en `E`. We mogen aannemen dat het Schoolhoofd iedere dag aan groep `A` toegevoegd wordt. (Anders verwisselen we per dag de labels `A`, `B`, `C`, `D` en `E` van de groepen.) Iedere dag zitten er 3 meisjes in groep `A` (vanwege vraag (a)). Dus in totaal zit er $3 \cdot 7 = 21$ keer een meisje in groep `A`. Dus er is een meisje x dat op een oneven aantal dagen in groep `A` zit. Dan zit het Schoolhoofd dus niet op een even aantal dagen in dezelfde groep als meisje x.

[2] Een student mag ook zeggen: voor vaste $j \in \{1,\dots,7\}$ is $\sum_{i=1}^{5}\binom{c_{i,j}}{2}$ onder de conditie dat $\sum_{i=1}^{5} c_{i,j} = 15$ minimaal als $c_{1,j} = \dots = c_{5,j} = 3$ vanwege de convexiteit van de binomiaalfunctie, en vervolgens afleiden dat gelijkheid geldt in (6.2). Dit is helemaal goed en levert meteen i) en ii) op.

7. LIMOnade ijsbollen

Ir. H. (Harold) de Boer
Transtrend BV

Een kegelvormig LIMOnadeglas met (bovenin) een straal van 5 en een hoogte van 12 is gevuld met ijsbollen. Elke ijsbol raakt het glas rondom. De bovenkant van de bovenste bol zit precies ter hoogte van de bovenkant van het glas. Naar beneden toe zitten oneindig veel steeds kleinere bolletjes.

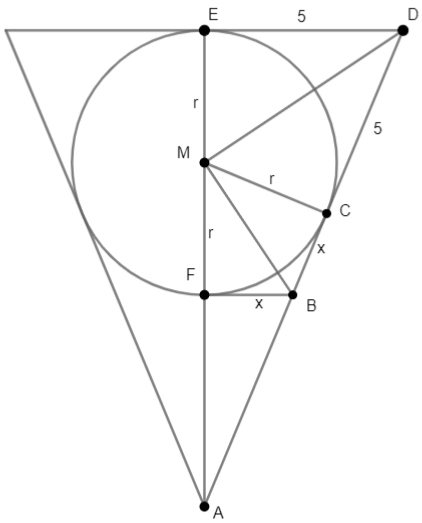


a) **(3 pt)** Bereken de straal van het bovenste bolletje.

b) **(7 pt)** Welk deel van de inhoud van het glas is gevuld met ijs?

Uitwerking.
Deze opgave draait om de mooie klassieke volume-regels van Archimedes, volgens welke een kegel $\frac{1}{3}$ deel van het volume vult van zijn omvattende cilinder en een bol het (overige) $\frac{2}{3}$ deel van dat volume.

(a) We rekenen eenvoudig in het platte vlak. Zie schets met daarin aangegeven de punten A, B, C, D, E, F en het middelpunt van de bovenste bol M. De straal van deze bol noemen we r.



Duidelijk zal zijn dat de driehoeken BFM, BCM, MED en MCD gelijkvormig zijn. Dus geldt $|BF| = |BC|$, noem dit $|BF| = |BC| = x$. Uit de gelijkvormigheid volgt

$$\frac{x}{r} = \frac{r}{5} \iff x = \frac{r^2}{5}.$$

Ook de driehoeken EDA en FBA zijn gelijkvormig. Daaruit volgt

$$\frac{x}{12 - 2r} = \frac{5}{12} \iff 12x = 60 - 10r.$$

Invullen x geeft $\frac{12}{5}r^2 + 10r - 60 = 0$. Dat geeft 1 positieve oplossing: $r = \frac{10}{3}$, de gezochte straal van het bovenste bolletje.

(b) Merk op dat $x = \frac{20}{9}$. We gaan berekenen welk deel van het segment van het glas tussen niveau F en E gevuld is met ijs. Volgens de elementaire schalingsbeginselen geldt dan hetzelfde voor elk segment rond elke andere bol. Het volume van een cilinder met straal 5 en hoogte 12 noemen we V. Dan heeft een kegel met straal 5 en hoogte 12 een inhoud $\frac{1}{3}V$. Het deel beneden F is een factor $\frac{x}{5}$ kleiner, dus dat heeft een volume $\left(\frac{x}{5}\right)^3 \cdot \frac{V}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \frac{V}{3}$. Daarmee is het volume van het bovenste segment $\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6\right)$.

Een bol met straal 5 vult $\frac{2}{3}$ van een cilinder met straal 5 en hoogte 10, dat is $\frac{2}{3} \cdot \frac{10}{12}$ van een cilinder met straal 5 en hoogte 12, dus $\frac{10}{18}V$. Een bol met straal vult daarvan $(r/5)^3 \, \frac{2}{3}\frac{5}{6}V$. Invullen van r geeft $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{5}{6}V$.

Dit geeft voor het volume van de bol gedeeld door het volume van het glassegment

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{5}{6}V}{\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6\right) \frac{1}{3}V} = \frac{2^3 3^2 5}{3^6 - 2^6} = \frac{72}{133}.$$

Dit kunnen we doortrekken voor het hele glas.

8. Dubbel in de war gegooid

J. (Jan-Willem) van Ittersum MSc
Universiteit Utrecht

Gunther heeft 4038 dozen genummerd van 1 t/m 4038 met in doos i een briefje met daarop het getal i. Vervolgens komt Harry langs die alle nummers in de war gooit op de volgende manier. Hij verwisselt 2019 keer de briefjes uit twee verschillende dozen op zo'n manier dat elk briefje precies één keer verwisseld wordt. Op dit moment is het dus zo dat in doos i een briefje met het getal j zit met $j \neq i$ en in doos j een briefje met het getal i zit. Vervolgens komt Marieke binnen die ook 2019 keer de briefjes uit verschillende dozen verwisselt op zo'n manier dat elk briefje precies één keer verwisseld wordt.
Gunther doet het volgende. Hij opent één van de dozen en bekijkt het getal dat in die doos zit. Vervolgens opent hij de doos met het nummer dat op het briefje staat en bekijkt het getal dat daar in zit. Zo gaat hij door tot hij weer de eerste doos opent. Op een blaadje schrijft hij nu hoeveel dozen hij heeft geopend. De geopende dozen gooit hij weg en daarna begint hij weer van vooraf aan. Zo gaat hij door tot hij alle dozen heeft weggegooid. Op dat moment staan er een aantal getallen met som 4038 op zijn briefje.

a) **(5 pt)** Bewijs dat elk getal op Gunthers briefje een even keer voorkomt.

Zij $a_1, \ldots, a_m$ een aantal positieve gehele getallen met $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = 2019$.

b) **(5 pt)** Bewijs dat Marieke er voor kan zorgen dat op Gunthers briefje precies twee keer de getallen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ staan.

Uitwerking.
Zij $n = 2019$.

(a) Zij $f : \{1, \ldots, 2n\} \to \{1, \ldots, 2n\}$ zodanig dat $f(i)$ gelijk is aan het nummer van het briefje in doos i nadat Harry is langsgekomen. Zij $g : \{1, \ldots, 2n\} \to \{1, \ldots, 2n\}$ zodanig dat $gf(i)$ gelijk is aan het nummer van het briefje in doos i nadat Harry en Marieke alles in de war hebben gegooid. Merk op dat f een dekpuntsvrije involutie is, i.e. $f(i) \neq i$ en $f \circ f(i) = i$ voor alle i. Ook g is een dekpuntsvrije involutie. Schrijf nu $(gf)^k$ voor gf precies k keer achter elkaar uitgevoerd. Indien $(gf)^k(i) = i$ volgt dat

$$(gf)^k(f(i)) = (gf)^{k-1}(g(i)) = (gf)^{k-1}g(gf)^k(i) = (gf)^{k-1}(fg)^{k-1}f(i) = f(i).$$

Analoog volgt uit $(gf)^k(f(i)) = f(i)$ dat $(gf)^k(i) = i$. Als Gunther begint bij doos i schrijft hij de kleinste postitieve gehele k op waarvoor $(gf)^k(i) = i$. Deze k is gelijk aan de kleinste k waarvoor $(gf)^k(f(i)) = f(i)$. Bovendien kan het niet zo zijn dat als Gunther begint in doos i hij $f(i)$ tegenkomt, want dan is er een postieve gehele ℓ waarvoor geldt dat $(gf)^\ell(i) = f(i)$, oftewel

$$\begin{cases} f(gf)^{\ell/2}(i) = (gf)^{\ell/2}(i) & \text{als } \ell \text{ even,} \\ gf(gf)^{(\ell-1)/2}(i) = f(gf)^{(\ell-1)/2}(i) & \text{als } \ell \text{ oneven,} \end{cases}$$

in tegenspraak met het feit dat f en g geen dekpunten hebben. Oftewel, als Gunther begint in doos i schrijft hij hetzelfde getal op als wanneer hij doos $f(i)$ tegenkomt. Alle getallen schrijft hij dus een even keer op.

(b) Wegens symmetrie nemen we z.v.v.a. aan dat

$$f(i) = \begin{cases} i-1 & i \text{ even}, \\ i+1 & i \text{ oneven}. \end{cases}$$

Definiëer g voor $i = 1, \ldots, 2a_1$ door

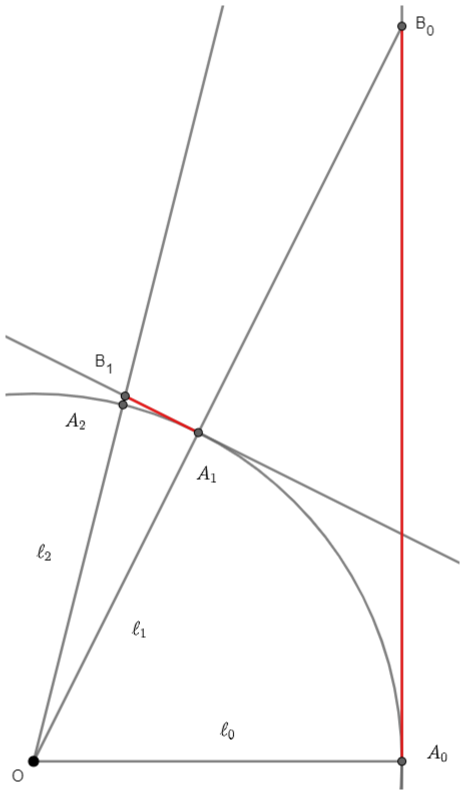
$$g(i) = \begin{cases} i-3 \mod 2a_1 & i \text{ even}, \\ i+3 \mod 2a_1 & i \text{ oneven}, \end{cases}$$

zodat het beeld van $\{1, \ldots, 2a_1\}$ gelijk is aan $\{1, \ldots, 2a_1\}$. Merk op dat g een dekpuntsvrije involutie is op de getallen $1, \ldots, 2a_1$. Per constructie van g volgt dat als Gunther in een doos met een oneven nummer begint hij precies de dozen $1, 3, 5, \ldots, 2a_1 - 1$ tegenkomt en als hij begint met een doos met een even nummer hij de dozen $2, 4, \ldots, 2a_1$ tegenkomt. Hij schrijft dus twee keer a_1 op zijn briefje. Door de functie g inductief uit te breiden kan Marieke er nu ook voor zorgen dat Gunther de andere getallen $a_2, \ldots, a_m$ op zal schrijven.

9. De verborgen kracht van de raaklijn

drs. S. (Stijn) Cambie
Radboud Universiteit Nijmegen

We schrijven Ω voor de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$. Voor alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, teken de rechte ℓ_k door de oorsprong met richtingscoëfficiënt $2k$. Dus ℓ_k is de lijn in $\mathbb{R}^2$ gegeven door de vergelijking $y = 2kx$. Het snijpunt van ℓ_k en Ω in $\mathbb{R}^2_{>0}$ noemen we A_k. De raaklijn aan Ω door A_k snijd ℓ_{k+1} in een punt B_k. Zie bijbehorende schets voor $k = 0, 1$.



Bepaal de waarde van

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_k B_k|$$

waar $|AB|$ de lengte van het lijnstuk tussen de punten A en B aangeeft.

Uitwerking.
Laat $\alpha_k = \angle A_k O A_0$ en $\beta_k = \angle A_{k+1} O A_k$. Per definitie van de tangens geldt $\tan(\beta_k) = |A_k B_k|$. Merk nu op dat $\beta_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k$, en $\tan(\alpha_k) = 2k$. Dus met de verschilformule

$$\tan(\beta_k) = \tan(\alpha_{k+1} - \alpha_k) = \frac{\tan(\alpha_{k+1}) - \tan(\alpha_k)}{1 + \tan(\alpha_{k+1})\tan(\alpha_k)} = \frac{2(k+1) - 2k}{1 + 2k(2k+2)} = \frac{2}{(2k+1)^2}.$$

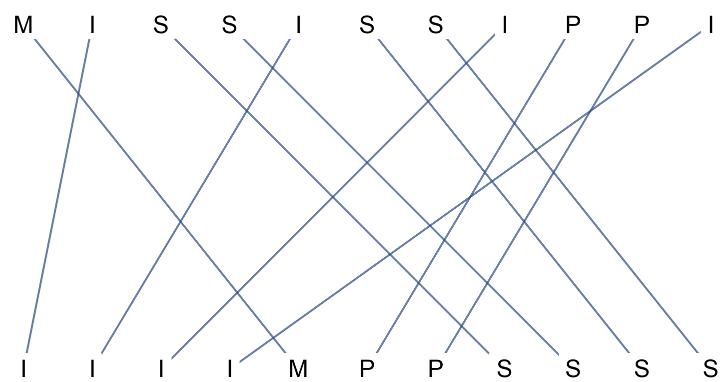
We concluderen dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_k B_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = 2\left(1 - \frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{6} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

10. Overschot

dr. T. (Tom) Verhoeff
Technische Universiteit Eindhoven

Beschouw het woord MISSISSIPPI. Deze letters kunnen in veel verschillende volgordes gepermuteerd worden, bijvoorbeeld in alfabetische volgorde: IIIIMPPSSSS.
Een *inversie* in zo'n permutatie is een paar van verschillende letters dat niet in alfabetische volgorde staat. We noemen een permutatie *even* als deze een even aantal inversies bevat, en anders noemen we hem *oneven*.
Een simpele manier om het aantal inversies te bepalen is als volgt: schrijf de letters van de gegeven permutatie naast elkaar. Schrijf daaronder de letters in alfabetische volgorde. Trek vervolgens een lijn tussen alle corresponderende letters. Dan is er een bijectie tussen de inversie en de snijdende lijnen in het diagram. De inversies van het woord MISSISSIPPI



Figuur 10.1: Inversies in het woord MISSISSIPPI

kunnen bijvoorbeeld geteld worden als snijdende lijnen in Figuur 10.1. Dus MISSISSIPPI heeft 24 inversies, en is even.

1. **(4 pt)** Beschouw de verzamelingen van even en oneven permutaties van het woord RARARA. Welke is groter, en wat is het verschil in grootte?

2. **(6 pt)** Zelfde vraag, maar nu voor het woord MISSISSIPPI.

Motiveer je antwoorden.

Uitwerking.
Zie ook het bijbehorende artikel van dr. Verhoeff. [3]
Allereerst de antwoorden:

1. Voor het woord RARARA is het aantal even permutaties gelijk aan het aantal oneven permutaties. Dus het verschil is 0.

2. Het woord MISSISSIPPI heeft meer even permutaties dan oneven permutaties. Het verschil is 30.

Door korte woorden (A, AB, AAB, ABC, etc.) te analyseren, zie je al gauw dat het aantal even en oneven permutaties soms hetzelfde is, of dat er soms meer even permutaties zijn, maar nooit meer oneven.
Een belangrijk (bekend) inzicht is

[3] Tom Verhoeff. "The Spurs of D. H. Lehmer: Hamiltonian paths in neighbor-swap graphs of permutations". *Designs, Codes and Cryptography*, **84**(1):295–310 (July 2017).

Lemma 1. *Na het verwisselen van twee direct aangelegen verschillende letters veranderd het aantal inversies met precies één, en dus keert de pariteit om.*

Bewijs. Beschouw het diagram met de snijdende lijnen. Als de verwisselde letters in alfabetische volgorde stonden, dan sneden de lijnen vanuit de twee letters die we verwisselen eerst niet en nu wel. Vice versa als ze niet in alfabetische volgorde stonden. Omdat de rest van de snijpunten niet beïnvloed is door de verwisseling, volgt het resultaat. □

Het andere (minder bekende) benodigde resultaat is het volgende:

Lemma 2. *Het aantal even permutaties is gelijk aan het aantal oneven permutaties dan en slechts dan als er twee of meer letters een oneven aantal keer voorkomen. En als het aantal letters dat een oneven aantal keer voorkomt minder is dan 2, dan zijn er meer even permutaties, en dit verschil is gelijk aan de binomiaalcoëfficiënt*

$$\binom{n \div 2}{k_1 \div 2,\ \ldots,\ k_m \div 2} \tag{10.1}$$

waar $\div$ deling zonder rest aangeeft, n het totaal aantal letters, en de k_i het aantal keer dat elke letter voorkomt.

Bewijs. Definiëer een *stotterpermutatie* als een permutatie waarin, als je de letters van links naar rechts groepeert in paren, elke groep uit identieke letters bestaat. Indien het woord een oneven aantal letters heeft, heeft de laatste groep één letter. Dus, MISSISSIPPI is geen stotterpermutatie, maar IISSIISSPPM wel. Een aantal observaties

1. In een stotterpermutatie komen alle letters (op één na wellicht) een even aantal keer voor.

2. Als een woord twee of meer letters heeft die een oneven keer voorkomen, dan bestaan er geen stotterpermutaties van dat woord.

3. Stotterpermutaties zijn duidelijk even, want inversies komen in paren.

4. Alle niet-stotterpermutaties kunnen als volgt weggestreept worden: Beschouw het meest linkse letterpaar (in dezelfde groepering als gebruikt voor de definitie van de stotterpermutatie) met verschillende letters, zo'n paar bestaat omdat de permutatie geen stotterpermutatie is. Vanwege bovenstaande lemma heeft de permutatie die deze twee letters verwisselt een andere pariteit, dus deze permutaties vallen tegen elkaar weg. Dus er is een bijectie tussen even en oneven *niet-stotter* permutaties.

We concluderen dat het overschot aan even permutaties altijd gelijk is aan het aantal stotterpermutaties. Dus resteert alleen het aantal stotterpermutaties te tellen, wat duidelijk gelijk is aan de gegeven binomiaalcoëfficiënt. □

We passen dit noe eerst toe op het woord RARARA. Er zijn hier geen stotterpermutaties, want beide letters komen een oneven aantal keer voor. Dus het aantal even permutaties is gelijk aan het aantal oneven permutaties.
Vervolgens beschouwen we het woord MISSISSIPPI. Hier zijn er wel stotterpermutaties, want alleen de letter M komt een oneven aantal keer voor. Dus het aantal even permutaties min het aantal oneven permutaties is gelijk aan

$$\binom{11 \div 2}{4 \div 2,\ 1 \div 2,\ 2 \div 2,\ 4 \div 2} = \binom{5}{2,\ 0,\ 1,\ 2} = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30.$$

11. Kleuringen vergelijken

dr. V. S. (Viresh) Patel
Universiteit van Amsterdam

Een graaf $G = (V, E)$ is d-regulier als elke knoop v precies d buren heeft. We zeggen dat $f : V \to \{1, \dots, k\}$ een geldige k-kleuring is als voor elke $uv \in E$, $f(u) \neq f(v)$. We schrijven K_r voor de volledige graaf op r knopen (dus met alle $\binom{r}{2}$ lijnen). We schrijven sK_r voor de graaf met sr knopen die de disjuncte vereniging is van s kopieën van K_r.
Zij $k \geq d + 1$ vast. Laat zien dat elke d-reguliere graaf op $s(d+1)$ knopen ten minste zoveel k-kleuringen heeft als sK_{d+1}.

Uitwerking.
Merk allereerst op dat sK_{d+1} precies $(k_{(d+1)})^s$ geldige k-kleuringen heeft, met

$$k_{(r)} := k(k-1)\cdots(k-r+1).$$

Neem nu een willekeurige d-reguliere graaf $G = (V, E)$ met $s(d+1)$ knopen. Beschouw een arbitraire ordening L van de knopen, en schrijf $d_L^-(v)$ voor het aantal buren van v dat voor v komen in de ordening L. Door de knopen in volgorde te kleuren zien we dat G tenminste

$$\chi(G, L, k) := \prod_{v \in V} (k - d_L^-(v))$$

geldige kleuringen heeft.
Het volstaat dus om een ordening L te vinden zodat $\chi(G, L, k) \geq (k_{(d+1)})^s$. Nemen we de logaritme van beide kanten, dan willen we dus een ordening L vinden zodat

$$\sum_{v \in V} \log(k - d_L^-(v)) \geq s \sum_{i=k-d}^{k} \log(i).$$

Nemen we een willekeurige ordening L en een vaste knoop v, dan

$$\mathbb{E}[\log(k - d_L^-(v)] = \frac{1}{d+1} \sum_{i=k-d}^{k} \log(i)$$

aangezien de knoop v en zijn buren uniform willekeurig geordend worden, dus $k - d_L^-(v)$ is een uniform willekeurig getal uit $\{k - d, \dots, k\}$. Uit de lineariteit van verwachting volgt

$$\mathbb{E}[\log(\chi(G, L, k))] = s(d+1)\frac{1}{d+1} \sum_{i=k-d}^{k} \log(i) = s \sum_{i=k-d}^{k} \log(i).$$

Dus er bestaat een ordening L met $\log(\chi(G, L, k)) \geq s \sum_{i=k-d}^{k} \log(i)$ zoals verlangd.

12. Oneindige stochastische sommen

S. H. A. (Stan) Tendijck MSc
Lancaster University, United Kingdom

Het is een bekend feit dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

Dus als we $1/n$ sommeren over een deelverzameling van $\mathbb{N}$ dan is het mogelijk dat de som eindig wordt. Een interessante generalisatie is te kijken naar een willekeurig gekozen verzameling van $\mathbb{N}$. Dus in plaats van te sommeren over een vaste deelverzameling van $\mathbb{N}$, laten we de deelverzameling bepaald worden door een rij stochasten X_n.
Kies $p \in [0,1]$ vast. We stellen dat $X_n \sim \text{Bin}(n+1, p)$, dus

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}.$$

Zij $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid 2X_n = n+1\}$ de verzameling van n waarvoor X_n gelijk is aan zijn verwachting indien p gelijk was aan $\frac{1}{2}$. We definiëren de stochastische variabele

$$S = \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{1}{n}.$$

Bepaal of S eindig is met kans 1, en bereken $\mathbb{E}[S]$.

Uitwerking.
Allereerst herdefiniëren we voor het gemak $X_n \sim \text{Bin}(n, p)$ en

$$A_n = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{als } 2X_n = n, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

De vraag is dan om te bewijzen dat

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right] < \infty.$$

Omdat alles positief is, mogen we vanwege Fubini de limieten omwisselen, dus

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[A_n\right].$$

Het is duidelijk dat $A_n = 0$ voor oneven n. Verder geldt dat

$$\mathbb{E}[A_{2n}] = \frac{1}{2n-1}\,\mathbb{P}(2X_n = 2n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \frac{1}{2n-1}.$$

Dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[A_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} p^n (1-p)^n \frac{1}{2n-1}$$

Ter illustratie bewijzen we kort eindigheid. Schatten we $p(1-p) \leq 1/4$, dan volgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[A_n] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{4^{-n}}{2n-1}.$$

Met de formules van Stirling zien we dat

$$\binom{2n}{n} = O\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right),$$

dus er bestaat een C zodat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[A_n] \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\sqrt{n}} < \infty,$$

het laatste volgt uit de integraaltest. Dus $\mathbb{E}[S] < \infty$, hieruit volgt ook dat $\mathbb{P}(S < \infty) = 1$. We gaan nu de waarde van de som bepalen. Laten we n van 0 lopen in plaats van 1, dan krijgen we

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot (n+1)!} p^{n+1}(1-p)^{n+1} \frac{1}{2n+1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! \cdot n!(n+1)} p^{n+1}(1-p)^{n+1}$$

Definiëren we nu $w = p(1-p)$, dan $|w| \leq 1/4$ en

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(2n)!}{n! \cdot n!(n+1)} w^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \int_0^w z^n dz \\
&= \int_0^w 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} z^n \right) dz \\
&= \int_0^w \frac{2}{\sqrt{1-4z}} dz = 1 - \sqrt{1-4w} \\
&= 1 - \sqrt{(1-2p)^2} = 1 - |1-2p| = 2\min\{p, 1-p\}.
\end{aligned}$$

De verwisseling van som en integraal mag omdat alles niet-negatief is. De machtreeks convergeert voor $z \in [0, 1/4)$, dus dit mag ook want $w \in [0, 1/4]$ (de waarde in $z = 1/4$ draagt niets bij aan de integraal als $w = 1/4$).