LIMO 2022

Uitwerkingenboekje

FLOW TRADERS

DIAMANT
Discrete Interactive and Algorithmic Mathematics Algebra and Number Theory
A mathematics cluster funded by NWO OCW and E

optiver

ASML

TU Delft

transtrend

Universiteit van Amsterdam
Korteweg - de Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

KWG

natuurwetenschappelijke studievereniging amsterdam

Dit uitwerkingenboekje is een uitgave van de LIMO-commissie 2022:
Jolein Rau, Casper Loman, Jim Wittebol, Siebe Verheijen, Constantijn Dekker, Pim Meulensteen, Alec van Duin en Matthijs Pool
e-mail: `limo@nsaweb.nl`
website: `limo2022.nsaweb.nl`
Opgaven: M. Staps, H. Smit, H. Lenstra, J. Zoethout, J. Winkel, L. Molag, S. Cambie, M. Daas, J. Konter, R. Bocklandt, W. Rienks, D. Gijswijt, A. Schrijver, H. de Boer

Inhoudsopgave

1. Verdubbelen is bijtellen

Ir. H. (Harold) de Boer
Transtrend BV

Bepaal het aantal natuurlijke getallen $1 \leq n \leq 1000$ waarvoor geldt:

$$c(2n) = c(n) + 1,$$

waarbij $c(n)$ is gedefinieerd als de som van de cijfers van het getal n.

Uitwerking.
Voor alle $m \in \mathbb{N}$ geldt: $c(2m) = 2(cm) - 9 \cdot |\{\text{aantal cijfers in } m \text{ die groter dan of gelijk aan 5 zijn}\}|$. We noemen deze eigenschap $(*)$ Het gemakkelijke bewijs hiervan laten we hier achterwege. We claimen nu dat een noodzakelijke voorwaarde is dat $n \equiv 1 \mod 9$. Dit volgt omdat we moeten hebben dat $c(2n) \equiv 2c(n) \mod 9$. Dus we vinden

$$c(2n) = c(n) + 1 \implies 2c(n) \equiv c(n) + 1 \mod 9 \iff c(n) = 1 \mod 9.$$

Met $1 \leq n \leq 1000$ geeft dit ons $c(n) \in \{1, 10, 19\}$. Daarmee brengen we de verzameling voldoende getallen terug tot 4 categorieën op basis van $c(n)$ en het aantal cijfers > 0, waarna uit $(*)$ volgt hoeveel van de cijfers groter of gelijk aan 5 moeten zijn.

$c(n)$	aantal cijfers > 0	aantal cijfers > 5	Categorie
1	1	0	A
10	2	1	B
10	3	1	C
19	3	2	D

Voor elk van deze categorieën bepalen we welke combinatie van cijfers voldoen. En voor elk van deze combinaties kunnen we bepalen hoeveel verschillende getallen dit levert door variatie van volgorde en toevoeging van nullen.

Categorie	Voldoende combinaties	Aantal oplossingen
A	1	4
B	19,28,37,46	$4 \cdot 6 = 24$
C	514,523,613,622,712,811	$4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 30$
D	199,289,379,388,469,478	$4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 30$

Dit geeft een totaal van 88 voldoende getallen

2. Een prooi-roofdiermodel

M. (Merlijn) Staps Msc. & Dr. H. (Harry) Smit
Princeton University & MPIM Bonn

Een koe en een haas bevinden zich elk in een hoekpunt van een regelmatige $2n$-hoek voor zekere $n \geq 2$. Elke minuut bewegen beide dieren naar een aangrenzend hoekpunt. De haas verandert hierbij nooit van richting. De koe verandert elke keer van richting met kans $p > 0$ (onafhankelijk van eventuele vorige veranderingen van richting).
De beginposities en beginrichtingen van beide dieren worden willekeurig gekozen (elk hoekpunt met even grote kans en elke beginrichting met even grote kans), op zo'n manier dat er (aan beide kanten) een even aantal zijdes tussen de koe en de haas zit (dit aantal kan nul zijn).
Het proces eindigt als de koe de haas vangt, dat wil zeggen, als ze zich op hetzelfde hoekpunt bevinden (dit kan meteen zijn). Je hoeft niet te bewijzen *dat* de koe de haas inderdaad altijd vangt, en je hoeft ook niet te bepalen *hoe* de koe de haas vangt. Dat weet je immers nooit.

(a) Bepaal hoe lang het gemiddeld duurt voordat de koe de haas vangt.

(b) Als de koe de haas zo snel mogelijk wil vangen, met welke kans p moet zij dan van richting veranderen?

(c) Wat is groter: de kans dat de koe en de haas tijdens het proces dezelfde richting in bewegen (allebei tegen de klok in of allebei met de klok mee), of de kans dat de koe en de haas tijdens het proces een verschillende richting in bewegen?

Uitwerking.

a) Definieer voor even getallen $k = 0$, $k = 2$, $\ldots$, $k = 2n - 2$:

- T_k als de gemiddelde tijd (in minuten) die het kost voor de koe om de haas te vangen, gegeven dat de afstand tussen de haas en de koe gelijk is aan k *en* de koe en de haas in de vorige stap dezelfde kant op bewogen;
- U_k als de gemiddelde tijd (in minuten) die het kost voor de koe om de haas te vangen, gegeven dat de afstand tussen de haas en de koe gelijk is aan k *en* de koe en de haas in de vorige stap juist *niet* dezelfde kant op bewogen.

Hierbij bekijken we "de afstand tussen de haas en de koe" altijd vanuit het perspectief van de haas, dus deze afstand is aantal stappen dat de haas zou moeten zetten (in zijn bewegingsrichting) om de koe te bereiken (als de koe juist stil zou staan). Merk op dat dus ook $T_0 = U_0 = 0$.

Merk op dat de afstand tussen de koe en de haas gelijk blijft als beide dieren in dezelfde richting bewegen, en anders juist met 2 afneemt. Omdat de koe met kans p van richting verandert, vinden we de recursieve relaties

$$T_k = 1 + p \cdot U_{k-2} + (1-p) \cdot T_k$$
$$U_k = 1 + p \cdot T_k + (1-p) \cdot U_{k-2}$$

voor $k \geq 2$. Tellen we deze vergelijkingen bij elkaar op, dan vinden we dat $T_k + U_k = 2 + T_k + U_{k-2}$. Uit $U_0 = 0$ volgt nu dat $U_k = k$. Vullen we dit in de eerste vergelijking in, dan zien we dat $p \cdot T_k = 1 + p(k-2)$, oftewel $T_k = k - 2 + 1/p$ voor $k \geq 2$.

In de beginsituatie is de kans op elke even afstand van 0 tot $2n-2$ even groot (namelijk $1/n$) en is de kans dat de koe en de haas dezelfde kant op bewegen even groot als dat ze niet dezelfde kant op bewegen. Dit betekent dat de gemiddelde tijd voordat de koe de haas vangt gelijk is aan

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{2n} (T_{2\ell} + U_{2\ell}) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{2n} \left(4l - 2 + \frac{1}{p} \right) = \frac{(n-1)(2(n-1)p+1)}{2np}.$$

Hiermee is de vraag beantwoordt.

b) Als de koe de haas zo snel mogelijk wil vangen, dan moet bovenstaand zo klein mogelijk zijn. Het antwoord op a) is gelijk aan $\frac{n-1}{2np} + \frac{(n-1)^2}{n}$, dus de optimale waarde van p is zo groot mogelijk: $p = 1$. Merk op dat in dit geval de koe de hele tijd heen en weer beweegt.

c) Als de beginafstand k is, bewegen de koe en de haas $\frac{k}{2}$ keer in verschillende richtingen voordat de haas gevangen is. Omdat de gemiddelde waarde voor k gelijk is aan $n-1$, bewegen de koe en de haas dus gemiddeld $\frac{n-1}{2}$ keer in verschillende richtingen. Met (a) volgt daarom dat de koe en de haas gemiddeld

$$\frac{(n-1)(2(n-1)p+1)}{2np} - \frac{n-1}{2} = \frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)(1-2p)}{2np}$$

keer in dezelfde richting bewegen. Om de vraag te beantwoorden, moeten we dus $\frac{n-1}{2}$ vergelijken met $\frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)(1-2p)}{2np}$. Als $p < \frac{1}{2}$ is de kans dat de dieren in gelijke richting bewegen groter, als $p = \frac{1}{2}$ zijn de kansen gelijk en als $p > \frac{1}{2}$ is de kans dat de dieren in verschillende richting bewegen groter.

Het komt wellicht als een verrassing dat de kansen in (c) niet altijd even groot zijn; de koe beweegt immers op elk moment met 50% kans in dezelfde richting als de haas en met 50% kans in de tegenovergestelde richting. De reden hiervoor is dat wanneer het proces eindigt afhangt van de richting waarin de koe beweegt. Het aantal stappen in de tegenovergestelde richting als de haas is bijvoorbeeld nooit groter dan $n-1$ (dan is het proces sowieso geëindigd), terwijl het aantal stappen in dezelfde richting willekeurig groot kan zijn.

3. Geen hogere machten

Prof. dr. H. W. (Hendrik) Lenstra
Universiteit Leiden

Stel a, n, m zijn positieve gehele getallen met $a^n = 1 + nm$ en $\mathrm{ggd}(n, m) = 1$. Bewijs $n = 1$.

Uitwerking.
Beschouw de multiplicatieve groep $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ van restklassen modulo n die copriem met n zijn. Daar zit $(a \mod n)$ in, en de orde k (zeg) van dat element deelt n. Als k kleiner is dan n, dan is er een priemfactor p van n waarvoor k een deler van n/p is. Dan geldt $a^{n/p} = 1 + nh$ voor een geheel getal h, en als men dit tot de macht p verheft, ziet men gemakkelijk dat m deelbaar is door p, een tegenspraak met $\mathrm{ggd}(m, n) = 1$. Deze tegenspraak bewijst $k = n$. Maar k is ook een deler van de orde van de groep $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, dus die orde is tenminste n. Dat kan alleen als $n = 1$.

4. Creatief knippen

J. (Jetze) Zoethout Msc.
Universiteit Utrecht

Je bent op een knutselmiddag en je hebt een stuk papier voor je liggen (de vorm is niet noodzakelijk rechthoekig, maar wel convex). Het papier heeft de goede vorm, maar je hebt eigenlijk twee zulke stukken nodig. Daarom wil je uit je stuk papier twee kleinere stukken knippen met precies dezelfde vorm. In deze opgave onderzoeken we hoe groot je deze kleinere stukken kunt maken.

Een deelverzameling $X \subseteq \mathbb{R}^2$ noemen we *geschikt* als X niet-leeg, open, begrensd en convex is. Voor een reëel getal $r > 0$ noemen we een geschikte deelverzameling $X \subseteq \mathbb{R}^2$ *r-kopieerbaar* als er $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ bestaan, zodanig dat:

- $X_1 \subseteq X$ en $X_2 \subseteq X$;
- $X_1 \cap X_2 = \emptyset$;
- X_1 en X_2 zijn beide gelijkvormig aan X met vergrotingsfactor r.

(a) Bepaal de grootste $r > 0$ waarvoor er een geschikte $X \subseteq \mathbb{R}^2$ bestaat die r-kopieerbaar is.

(b) Bepaal de grootste $r > 0$ zodat *elke* geschikte $X \subseteq \mathbb{R}^2$ r-kopieerbaar is.

We zeggen dat $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ gelijkvormig is aan $X \subseteq \mathbb{R}^2$ met vergrotingsfactor $r > 0$ als er een bijectie $f\colon X \to Y$ bestaat, zodanig dat $d(f(x), f(x')) = r \cdot d(x, x')$ voor alle $x, x' \in X$. Hierbij staat $d(-,-)$ voor de afstand tussen twee punten in $\mathbb{R}^2$.

Uitwerking.
De antwoorden zijn:

(a) $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

(b) $r = \frac{1}{2}$.

Voor (a) merken we op dat elke geschikte deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ meetbaar is en eindige, positieve oppervlakte heeft. Als $X \subseteq \mathbb{R}^2$ r-kopieerbaar is, dan geldt:

$$\operatorname{Opp} X \geq \operatorname{Opp} X_1 + \operatorname{Opp} X_2 = r^2 \operatorname{Opp} X + r^2 \operatorname{Opp} X = 2r^2 \operatorname{Opp} X.$$

Dit geeft $2r^2 \leq 1$, oftewel $r \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Voor $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ nemen we een (open) rechthoek met zijdelengtes 1 en $\sqrt{2}$ (een A4-blad). Deze kunnen we, evenwijdig aan de korte zijde, opdelen in twee open rechthoeken met zijdelengtes $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en 1 (oftewel, twee A5-bladen).

Voor (b) laten we eerst zien dat elke geschikte $X \subseteq \mathbb{R}^2$ $\frac{1}{2}$-kopieerbaar is. Definieer $D = \sup\{d(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in X\}$, de diameter van X. Omdat X open is, geldt dat $d(x_1, x_2) < D$ voor alle $x_1, x_2 \in X$.[1] Daarnaast bestaan er $a_1, a_2 \in \overline{X}$ zodanig dat $d(a_1, a_2) = D$. Definieer nu X_i als het beeld van X onder de puntvermenigvuldiging vanuit a_i met factor $\frac{1}{2}$. Dan geldt

[1] Dit is redelijk bekend, maar mocht je het willen bewijzen: Stel dat $d(x_1, x_2) = D$. Omdat X open is, ligt er nog een punt $x' \in X$ op de halfrechte x_1x_2 voorbij x_2. Nu geldt $d(x_1, x') > d(x_1, x_2) = D$, tegenspraak.

per definitie dat X_1 en X_2 gelijkvormig zijn aan X met factor $\frac{1}{2}$, dus we controleren de andere twee eigenschappen.
Om te bewijzen dat $X_1 \subseteq X$, bekijk een punt $x \in X$ en zij x_1 het midden van a_1x; we moeten aantonen dat x_1 ook binnen X ligt. Kies $\varepsilon > 0$ zodat de open schijf met middelpunt x en straal ε geheel binnen X ligt. Zij $y \in X$ een punt zodat $d(a_1, y) < \varepsilon$, welke bestaat aangezien $a_1 \in \overline{X}$. Definieer z als de spiegeling van y in x_1, zodat $d(x, z) = d(a_1, y) < \varepsilon$. Wegens de keuze van ε ligt z ook binnen X. Aangezien X convex is en x_1 het midden van yz is, volgt nu dat $x_1 \in X$, zoals gewenst. Net zo tonen we aan dat $X_2 \subseteq X$.
Om te bewijzen dat $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, veronderstel dat er een punt $x \in X_1 \cap X_2$ bestaat, en zij b_i de spiegeling van a_i in x. Per aanname geldt dan dat $b_i \in X$. Echter, er geldt ook dat $d(b_1, b_2) = d(a_1, a_2) = D$, een tegenspraak met onze observatie dat $d(x_1, x_2) < D$ voor alle $x_1, x_2 \in X$.
Om het bewijs af te maken, laten we zien dat de open eenheidsschijf in $\mathbb{R}^2$ niet r-kopieerbaar is voor $r > \frac{1}{2}$. Zij O het middelpunt van een open eenheidsschijf X, en veronderstel dat $X_1 \subseteq X$ een open schijf met straal r en met middelpunt O_1 is. Omdat X_1 geheel binnen X moet liggen, geldt $d(O, O_1) \leq 1 - r < r$, waaruit volgt dat O binnen X_1 ligt. We concluderen dat elke twee open schijven met straal r die helemaal binnen X liggen in ieder geval O gemeenschappelijk hebben. Dit voltooit het bewijs. $\square$

Opmerking. De vraag kan ook algemener gesteld worden voor deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$. Voor (a) geeft een analoog argument met n-dimensionale inhoud dat $r \leq (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$, en een voorbeeld voor $r = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$ wordt gegeven door een n-dimensionale open hyperbalk met de juiste afmetingen. Voor (b) kan het argument bijna verbatim worden overgenomen - hierbij moet je 'schijf' natuurlijk vervangen door 'n-dimensionale bol'.


DO YOU THRIVE ON
OUTSMARTING
YOUR COMPETITION?
GRADUATE TRADER & TRADING INTERN
We are looking for talented individuals with excellent mathematical and analytical skills combined with an interest in global financial markets. Our Traders manage and optimize our daily positions, formulate innovative trading strategies whilst also developing tools.
As a Summer Intern you will learn about our trading strategies, trading system and experience life as a Trader at Flow.
GRADUATE SOFTWARE DEVELOPER PROGRAM
We prepared the Graduate Software Development program for ambitious graduates who like to be challenged every day. During the program, you will work in sprints and participate in stand-up meetings; at the same time, you will work together with your fellow graduate software engineers, and experience working with different Flow Traders development teams.
EVENTS
We are also hosting several online events for you to get more familiar with Flow Traders! You can check them out at our events page on our website.
Reach out to us at:
careers.europe@flowtraders.com
flowtraders.com/careers
FLOW TRADERS
Flow Traders is an international leading principal trading firm.

5. Een wirwar van lijnen

J. (Jeroen) Winkel Msc.
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Een *graaf* G bestaat uit een verzameling V van *knopen*, en een verzameling $E \subseteq V^2$ van *zijden*. Hierbij nemen we aan dat $(x, x) \notin E$ voor all $x \in V$, en als $(x, y) \in E$, ook $(y, x) \in E$. Als x en y knopen zijn, is een *pad* tussen x en y een rijte $x_0, x_1, \ldots, x_n \in V$, met $x_0 = x, x_n = y$ en $(x_i, x_{i+1}) \in E$ voor $0 \leq i \leq n-1$. Een graaf heet *samenhangend* als er een pad bestaat tussen elke twee knopen.

(a) Bekijk de graaf met $V = \mathbb{R}^2$ en $E = \{((a,b),(c,d)) \in V^2 \mid (a-c)^2 + (b-d)^2 = 1\}$. Is deze graaf samenhangend?

(b) Bekijk de graaf $V = \mathbb{Q}^2$ en $E = \{((a,b),(c,d)) \in V^2 \mid (a-c)^2 + (b-d)^2 = 1\}$. Is deze graaf samenhangend?

Uitwerking.

(a) JA deze graaf is samenhangend. Bekijk immers twee punten $P, Q \in \mathbb{R}^2$. We beginnen bij P en wandelen naar Q. Eerst zorgen dat we binnen een straal van 1 zijn: we kiezen simpelweg punten $P_0 = P, P_1, \ldots, P_k$ op het lijnstuk tussen P en Q waarbij de afstand tussen P_{i+1} en P_i gelijk is aan 1, en zodat $d(P_k, Q) < 1$. Teken nu de cirkels van straal 1 met middelpunten P_k en Q. Deze cirkels snijden elkaar, zeg in een punt R. Dan is $P_0, P_1, \ldots, P_k, R, Q$ een wandeling van P naar Q.

(b) NEE deze graaf is niet samenhangend. Hiervoor bewijzen we eerst een lemma: als a, b, c gehele getallen zijn met grootste gemene deler 1 en $a^2 + b^2 = c^2$, dan is elke positieve factor van c congruent aan 1 modulo 4. Bewijs Lemma: stel dat $2 \mid c$. Uit de vergelijking $a^2 + b^2 = c^2$ volgt dan dat $a^2 + b^2 \equiv 0 \mod 4$ Dit kan alleen als a en b ook even zijn, maar dan hebben a, b, c een gemene deler, tegenspraak. Stel nu dat c een oneven deler heeft die 3 is modulo 4. Dan heeft c noodzakelijk ook een priemdeler p die 3 is modulo 4. Dan $a^2 + b^2 \equiv 0 \mod p$ Ook zijn a en b niet deelbaar door p omdat a, b, c geen gemene deler hebben. Dus $(ab^{-1})^2 \equiv -1 \mod p$, maar dit is onmogelijk voor priemgetallen die 3 zijn modulo 4.

Zij nu $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ een punt in de graaf dat (indirect) verbonden is met 0. We bewijzen met inductie dat x van de vorm $\frac{p}{q}$ is, waarbij alle positieve factoren van q congruent zijn aan 1 modulo 4. De inductiebasis is okay, want $0 = (\frac{0}{1}, \frac{0}{1})$. Stel nu dat $(\frac{p}{q}, y)$ (indirect) verbonden is met 0 en alle factoren van q zijn congruent aan 1 modulo 4, en een volgend punt (x, y') heeft een zijde naar $(\frac{p}{q}, y')$. Dan kunnen we schrijven $x = \frac{p}{q} + \frac{a}{c}$ en $y' = y + \frac{b}{c}$ met $a^2 + b^2 = c^2$. We kunnen a, b, c zo kiezen dat ze geen gemene deler hebben. Uit het lemma weten we dat alle positieve factoren van c congruent zijn aan 1 modulo 4. Nu $x = \frac{pc+aq}{cq}$ en alle positieve factoren van cq zijn congruent aan 1 modulo 4, dit voltooit de inductie.

We concluderen dat de graaf niet samenhangend kan zijn, omdat er ook punten in de graaf zijn die niet aan de voorwaarde voldoen, zoals $(\frac{1}{3}, 0)$.

6. Niet-constante oplossingen van een constante differentiaalvergelijking

Dr. L. (Leslie) Molag
Universität Bielefeld

Vind alle niet-constante tweemaal differentieerbare functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodanig dat

$$f''(x) + 3f'(x)f(x) + f(x)^3$$

constant is.

Hint: Probeer eerst het geval $f''(x) + 3f'(x)f(x) + f(x)^3 = 0$.

Uitwerking.
Stel dat f voldoet, dan hebben we dus $f''(x) + 3f'(x)f(x) + f(x)^3 = C$, voor een constante $C \in \mathbb{R}$. We introduceren de substitutie $g(x) = e^{F(x)}$, waar $F(x)$ een reëelwaardige primitieve van $f(x)$ is. De reden achter deze substitutie is dat

$$g'''(x) = (f''(x) + 3f'(x)f(x) + f(x)^3)g(x) = Cg(x).$$

Dit is een derde orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten en we weten hoe we die moeten oplossen. We beschouwen eerst het geval $C = 0$, in dit geval is $g(x)$ een lineaire combinatie van $1, x$ en x^2. Aangezien g een positieve niet-constante functie is gaat dit alleen goed als $g(x) = c(a + (x - b)^2)$ voor positieve constanten a, c en reële b. Dit leidt tot de oplossingsverzameling

$$f(x) = 2\frac{x - b}{a + (x - b)^2}, \text{ met } a, b \in \mathbb{R}, a > 0.$$

We zullen aantonen dat er voor C ongelijk aan 0 geen niet-constante oplossing bestaat. We mogen door de herschaling $x \to \sqrt[3]{C}x$ zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $C = 1$. De oplossing van de lineaire differentiaalvergelijking is dan een lineaire combinatie van $e^x, e^{(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i)x}$ en $e^{(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i)x}$ of, beter toepasbaar voor onze situatie, van $e^x, e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ en $e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. Er geldt dus

$$g(x) = ae^x + be^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + ce^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

voor zekere constanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. De positiviteit van $g = e^F$ geeft

$$0 \leq \lim_{n \to -\infty} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi n \pm \pi}{\sqrt{3}}\right)} g\left(\frac{4\pi n \pm \pi}{\sqrt{3}}\right) = \pm c.$$

Dit impliceert dat $c = 0$. Analoog vinden we dat $b = 0$. We concluderen dat $F(x) = \log(a) + x$ en hieruit volgt de contradictie dat f constant is.

Opmerking: Je kunt de oplossingen bij $C = 0$ ook op een andere manier vinden. We proberen een oplossing f die ergens 0 is, zeg in $x = b$. Dan hebben we ook meteen dat $f''(b) = 0$ vanwege de differentiaalvergelijking. Nu schrijven we f als een machtreeks in $x = b$, dus $f(x) = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \ldots$ Merk op dat $a_0 = a_2 = 0$. Invullen van de machtreeks in de differentiaalvergelijking geeft dat

$$-(n+1)(n+2)a_{n+2} = \sum_{k_1+k_2=n} 3(k_1+1)a_{k_1+1}a_{k_2} + \sum_{k_1+k_2+k_3=n} a_{k_1}a_{k_2}a_{k_3}.$$

Op het eerste gezicht lijkt deze recurrentierelatie een rotzooi maar vanaf $n = 4$ begin je te vermoeden dat $a_n = 0$ voor alle even n. Als je dit vermoeden toepast zie je dat er eigenlijk maar weinig termen in de recurrentierelatie kunnen overleven. We vinden dan relatief gemakkelijk dat

$$a_3 = -\frac{a_1^2}{2}, \quad a_5 = \frac{a_1^3}{4}, \quad a_7 = -\frac{a_1^4}{8}, \ldots$$

Hierin herkennen we een patroon en we vinden

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_1 \left(-\frac{a_1}{2}\right)^k (x-b)^{2k+1} = 2\frac{x-b}{a+(x-b)^2}$$

als we $a = \frac{2}{a_1}$ identificeren. Het valt op dat de oplossingen duidelijk te herkennen logaritmische afgeleiden zijn. Dit zou je het idee kunnen geven om de substitutie $g(x)$ als boven te proberen.

7. Hadwiger in de andere richting

Dr. S. (Stijn) Cambie
IBS Zuid-Korea

In deze vraag beschouwen we alleen samenhangende grafen. Een graaf H is een minor van $G = (V, E)$ als we deze uit G kunnen verkrijgen door zijdes van G te verwijderen of samen te trekken. Een samentrekking van een zijde (u, v) wordt verkregen door u en v te vervangen door een enkele knoop die verbonden is met alle oorspronkelijke buren van u en v. De afstand tussen twee knopen u, v in een graaf is de lengte van het kortste pad tussen u en v. Dit duiden we aan met $d(u, v)$. De diameter van een graaf is dan gedefinieerd als $\max_{u,v\in V} d(u, v)$ (ook wel het langste kortste pad). Verder is de graad van een knoop u gedefinieerd als het aantal zijdes dat is verbonden aan u.
Het vermoeden van Hadwiger claimt dat G kan worden gepartitioneerd in niet meer dan $n-1$ stabiele delen (ofwel dat $\chi(G) < n$) wanneer K_n geen minor is van G.

(a) Bestaat er een bipartiete graaf G met diameter 2 die K_{2022} als minor heeft?

(b) Bestaat er een bipartiete graaf G met maximale graad $\Delta = 3$ die K_{2022} als minor heeft?

Uitwerking.
Ja er bestaan zulke grafen. We kunnen dit bewijzen voor iedere $n \geq 2023$.

(a) De graaf $K_{n,n}$ heeft K_n als minor (trek de zijdes van een maximale matching samen).

(b) Bouw n binaire bomen T_i van hoogte $\lceil \log_2(n-1) \rceil$ (of een ander soort boom met maximale graad 3 en op zijn minst $n-1$ bladeren). Geef elk van deze bomen een 2-kleuring. Voor ieder paar T_i, T_j van bomen, verbind een blad van T_i met een blad van T_j door middel van een zijde, elke boom heeft per constructie genoeg bladeren zodat dit op een manier kan waar elk (ex-)blad graad hoogstens 2 heeft. Stel nu dat twee verbonden bladeren dezelfde kleur hebben: kies dan een van de bladeren en plaats een extra knoop op de zijde tussen dit blad en de knoop van de boom waar hij aan verbonden is. We kunnen deze nieuwe vertex dan de kleur van het blad geven, en het blad de andere kleur. Op deze manier is onze nieuwe graaf weer bipartiet, van graad hoogstens 3. Door nu in elke boom T_i alle zijdes samen te trekken verkrijgen we K_n.

8. Lekker grabbelen

M.A. (Mike) Daas Msc.
Universiteit Leiden

Lotte grabbelt met terugleggen in een bak met daarin n genummerde doch verder identieke ballen. Laat zien dat de verwachtingswaarde van het aantal keren grabbelen tot ze elke bal minstens één keer gepakt heeft gelijk is aan nH_n[2].

Uitwerking.
Lotte speelt eigenlijk een Markovproces na met $n+1$ verschillende states, die overeenkomen met het aantal verschillende ballen dat ze reeds gepakt heeft. Bij elke grabbel kan ze ofwel verplaatsen naar de state waarin ze één bal meer gepakt heeft, of ze kan indezelfde state blijven. De totale verwachtingswaarde is dan nu de som van de verwachtingswaarden voor elke afzonderlijke state.
Veronderstel dus dat ze reeds m verschillende ballen gepakt heeft. De kans dat ze een bal pakt die ze al eerder eens gepakt heeft, is dan m/n en de kans dat ze een nieuwe pakt $1 - m/n$. De kans dat ze dus na precies k keer pakken voor het eerst een nieuwe bal pakt is dan $(m/n)^{k-1}(1 - m/n)$. De verwachtingswaarde wordt dan

$$\frac{n-m}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{m}{n}\right)^{k-1}.$$

Herinner dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} X^k = \frac{1}{1-X}$$

voor alle $0 < X < 1$. Deze genererende functie afleiden levert dan dat

$$\sum_{k=1}^{\infty} kX^{k-1} = \frac{1}{(1-X)^2}.$$

We kunnen nu $X = m/n$ invullen om de hierboven uitgewerkte verwachtingswaarde te berekenen als

$$\frac{n-m}{n} \frac{1}{(1-m/n)^2} = \frac{n}{n-m}.$$

Gesommeerd vinden we dus als algehele verwachtingswaarde

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{n}{n-m} = n \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} = nH_n,$$

waar H_n de n-de term in de harmonische reeks is.

[2] $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$, is de harmonische reeks.

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde en iedereen die de wiskunde een warm hart toedraagt. De vereniging is in 1778 opgericht en is ‘s werelds oudste nationale wiskunde genootschap. Het KWG publiceert onder andere de tijdschriften Nieuw Archief voor Wiskunde en Pythagoras.

Voor meer informatie zie ook onze site: www.wiskgenoot.nl

9. Een eigenaardig polynoom

Dr. J.W.T. (Johan) Konter
Universiteit Leiden

Bestaat er een polynoom P met gehele coëfficiënten dat de volgende twee eigenschappen heeft?

(i) P heeft geen rationale nulpunten.

(ii) Voor ieder natuurlijk getal n is er een gehele x zodat $P(x)$ deelbaar is door n.

Uitwerking.
Ja, dat bestaat. Een voorbeeld dat hieraan voldoet is

$$P(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 13)(x^2 + 39).$$

We weten dat een geheel getal a een kwadratisch residu is modulo p^k, met $\text{ggd}(a, p) = 1$, dan en slechts dan als

- het Legendre symbool $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$,
- $a \equiv 1 \mod 4$ als $p^k = 4$; of $a \equiv 1 \mod 8$ als p^k deelbaar is door 8 .

Nu onderscheiden we vier gevallen. Als $p = 2$, dan is $-39 \equiv 1 \mod 8$ een kwadratisch residu modulo p^k. Als $p = 3$ dan is 13 een kwadratisch residu modulo p^k. En als $p = 13$, dan is -3 een kwadratisch residu modulo p^k.

Als laatste geval hebben we p ongelijk aan 2, 3 en 13. Aangezien $\left(\frac{-3}{p}\right)\left(\frac{13}{p}\right) = \left(\frac{-39}{p}\right)$ kunnen deze drie symbolen niet alledrie gelijk zijn aan -1. Aangezien ze niet nul kunnnen zijn, moet minstens een van de symbolen 1 zijn. Dus -3, 13 of -39 is een kwadratisch residu modulo p^k.

We concluderen dat we voor elke $p^k|n$ een $x \mod p^k$ zo dat $p^k|P(x)$. Met de Chinese reststelling kunnen we dan ook een x vinden zo dat $n|P(x)$.

`Opmerking:`
Een ander voorbeeld is $P(x) = (x^2 - 13)(x^2 - 17)(x^2 - 221)$. Een voorbeeld dat niet werkt is $(x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^2 - 6)$. Omdat 2 geen kwadratisch residu is mod 3 en de factoren $(x^2 - 3)$ en $(x^2 - 6)$ beide maximaal een factor 3 bevatten, is dit nooit deelbaar door 27.

`Opmerking:`
De opgave wordt een stuk eenvoudiger als we alleen eisen dat p geen gehele nulpunten heeft. Dat voldoet bijvoorbeeld ook $P(x) = (2x - 1)(3x - 1)$. Voor $n = 2^a 3^b c$ met $a, b \geq 0$ en $\gcd(c, 6) = 1$ lossen we dan het stelsel $x \equiv 2^{-1} \pmod{3^b c}$, $x \equiv 3^{-1} \pmod{2^a}$ op met de Chinese reststelling.

10. De flamingodans

Dr. R.R.J. (Raf) Bocklandt
Universiteit van Amsterdam

In een cirkelvormige vijver staan $\ell > 0$ flamingo's op hun linkerpoot en $r > 0$ flamingo's op hun rechterpoot. Op de rand van de vijver staan drie meisjes die touwen vasthouden die een gelijkzijdige driehoek vormen. De meisjes lopen in gelijke tred rond de vijver zodat de koordendriehoek langzaam ronddraait. Telkens een flamingo over 1 van de touwen moet springen wisselt hij de poot waarop hij in de vijver staat. We weten dat tijdens het rondlopen alle flamingo's van poten wisselen, maar dat het totaal aantal flamingo's die op hun linkerpoot staat niet wijzigt.

(a) Toon aan dat alle flamingo's dichter bij de rand van de vijver staan dan bij het middelpunt van de vijver.

(b) Geef een voorbeeld van zo een configuratie met $(\ell, r) = (1, 1)$.

(c) Geef een voorbeeld van zo een configuratie met $(\ell, r) = (1, 2)$.

(d) Toon aan dat er voor elke (ℓ, r) met $\ell, r > 0$ een configuratie bestaat. Kan je er ook voor zorgen dat alle flamingo's zich in de bovenste helft van de vijver bevinden? (m.a.w positief imaginair deel hebben)

(e) Indien de koordendriehoek niet gelijkzijdig is gelden de bovenstaande eigenschappen niet meer. Toon aan dat als de driehoek stomphoekig is dat er dan geen $(1, 1)$-configuratie bestaat.

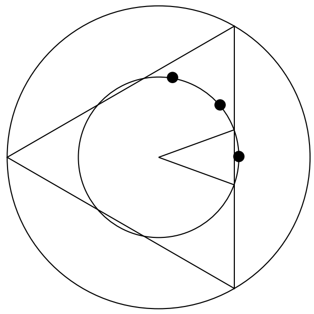
Opmerking: stel de vijver gelijk aan de eenheidcirkel in het complexe vlak en stel elke flamingo voor door een complexe getal. Twee flamingo's kunnen niet op dezelfde locatie staan.

Uitwerking.

(a) De straal van de ingeschreven cirkel van een gelijkzijdige driehoek is de $\cos 60° = 1/2$ van die van de omgeschreven. Dit wil zeggen dat als x de positie van de flamingo is en $||x|| \leq 1/2$ dan ligt de flamingo steeds binnen de driehoek en wisselt hij nooit van poot.

(b) De zijde van de driehoek is $2 \cos 60° = \sqrt{3}$. Teken een cirkel met straal $\sqrt{3}/3$. Deze cirkel snijdt de driehoek in zes punten die een regelmatige zeshoek vormen. De helft van deze cirkel ligt binnen de driehoek en de helft erbuiten. Merk op dat voor twee punten die tegenover elkaar op deze cirkel liggen, er altijd 1 buiten en 1 binnen de driehoek ligt. Kies de twee flamingo's op zo twee punten: $L = \sqrt{3}/3$, $R = -\sqrt{3}/3$. Als de driehoek begint rond te draaien zullen de twee flamingo's steeds samen over het touw springen en van poot wisselen.

(c) We zoeken eerst een cirkel waarvoor dubbel zoveel binnen de driehoek ligt als erbuiten. Dit wil zeggen dat er $120^\circ = 6 \times \pi/9$ graden buiten de cirkel ligt. Uit de figuur zien we dan dat de straal $\rho = \frac{1}{2}(\cos \pi/9)^{-1}$ moet zijn.



Kies nu de drie punten ρ, $\rho e^{i2\pi/9}$, $\rho e^{i4\pi/9}$. Als de driehoek roteert zitten er steeds twee van de drie punten binnen de roterende driehoek. Laat de flamingo's die erbuiten staan op hun linkerpoot staan en die erbinnen op hun rechterpoot.

(d) Zoek een straal ρ zodanig dat de cirkel $\ell/(r+\ell)$ binnen de driehoek ligt en $r/(r+\ell)$ erbuiten. Dit kan wegens de middelwaarde stelling want voor $r = 1/2$ ligt alles erbinnen en voor $r = 1$ ligt alles erbuiten.

Kies punten $\rho, \rho\zeta, \rho\zeta^2, \ldots, \rho\zeta^{\ell+k-1}$ waarbij $\zeta = e^{2\pi i/3(k+\ell)}$. Van die punten zijn er steeds ℓ die binnen de driehoek liggen en k erbuiten. Laat de flamingo's binnen de driehoek op hun linkerpoot staan en die erbuiten op hun rechterpoot.

(e) Merk op dat als de driehoek stomphoekig is, het middelpunt van de vijver niet in de driehoek ligt. Stel δ de afstand van het middelpunt tot de dichtste zijde en stel $x_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ en $x_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ de posities van de twee flamingo's. Via driehoeksmeting weten we dat minstens $1 - \arccos(\delta/\rho_i)/\pi > 50\%$ van de cirkel met straal ρ_i buiten de driehoek ligt.

Omdat de flamingo's steeds op hetzelfde moment van poot moeten wisselen moet de doorsnede van de cirkel $||z|| = \rho_1$ en de driehoek, gelijkvormig zijn met de doorsnede van $||z|| = \rho_2$ en de driehoek (of met het complement van de driehoek, maar dit is niet mogelijk omdat minstens 50% van die cirkels buiten de driehoek ligt).

Wegens die gelijkvormigheid moet $1 - \arccos(\delta/\rho_1) = 1 - \arccos(\delta/\rho_2)$. Omdat $\arccos : [0,1] \to [0, \pi/2]$ een bijectie is, geldt dat $\rho_1 = \rho_2$.

Als $\rho_1 = \rho_2$ kan dit enkel als $x_1 = x_2$ want het gedeelte buiten de driehoek heeft geen (niet-triviale) rotatiesymmetrie.

11. Een verrassende ondergrens

W. (Wouter) Rienks Msc.
Universiteit van Amsterdam

Vind de grootste $M \in \mathbb{R}$ zodanig dat

$$\limsup \frac{a_1 + \cdots + a_n}{a_{n-1}} \geq M,$$

voor ieder rijtje positieve gehele getallen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Uitwerking.
Wij claimen dat $M = 4$. Het voorbeeld $a_n = 2^n$ laat zien dat $M \leq 4$. Om in te zien dat $M = 4$ correct is, laat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rijtje positieve reele getallen. Definieer:

$$b_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{a_{n-1}} \qquad\qquad c_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{a_1 + \cdots + a_{n+1}}$$

Merk op dat:

$$c_{n+1} = \frac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{a_1 + \cdots + a_{n+2}} > \frac{a_1 + \cdots + a_n}{a_1 + \cdots + a_{n+2}} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_1 + \cdots + a_{n+2}} = \frac{1}{1 - c_n} \cdot \frac{1}{b_{n+2}}.$$

Stel $b = \limsup b_n < 4$. Dan geldt voor $n \gg 0$ dat $b_{n+2} \leq b$. Dus hebben we

$$c_{n+1} > \frac{1}{b(1 - c_n)}.$$

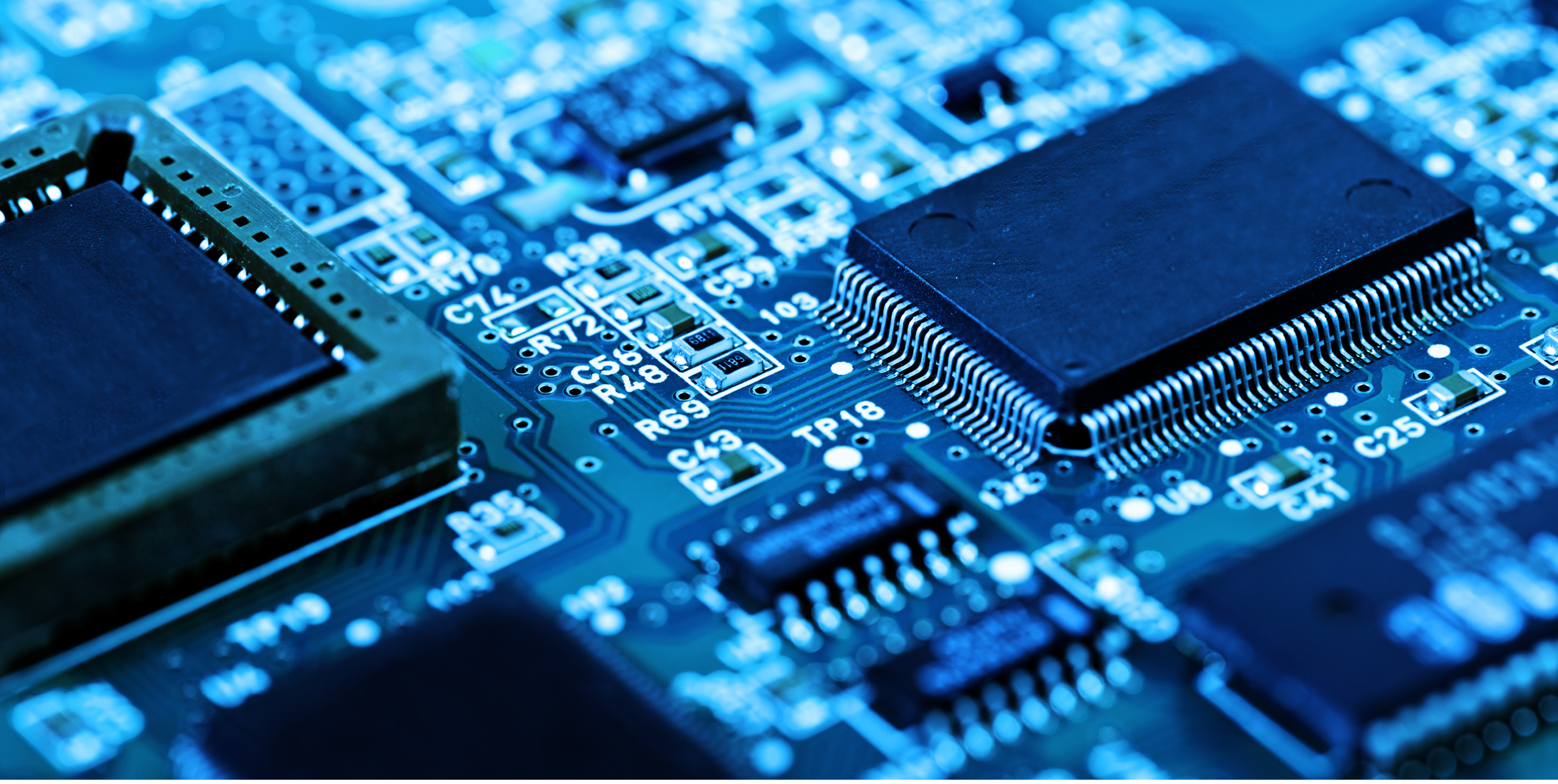
Aangezien $0 < c_n < 1$ (per definitie), geldt dat $(1 - c_n)c_n \leq \frac{1}{4}$. Dus hebben we

$$c_{n+1} = \frac{1}{b(1 - c_n)} > \frac{1}{4(1 - c_n)} \geq c_n.$$

Aangezien de c_n van boven begrensd zijn door 1, moet dus gelden dat het rijtje (c_n) convergeert naar een $c \in [0, 1]$. Als we aan beide kanten de limiet nemen krijgen we

$$\frac{1}{4} \geq c(1 - c) \geq \frac{1}{b},$$

ofwel $b \geq 4$, maar dat is in tegenspraak met onze aanname $b < 4$. Dus $b \geq 4$.

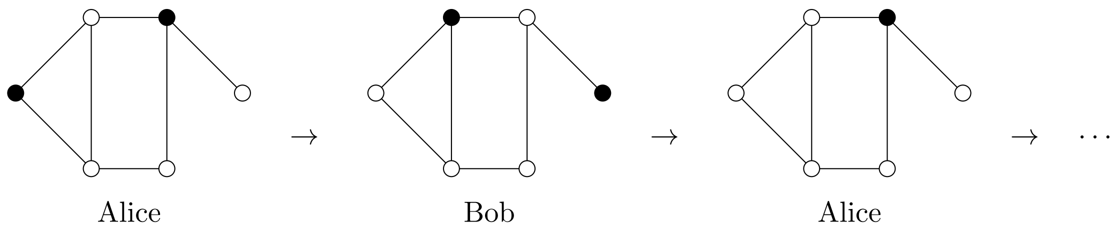



ASML

12. Meerderheid bepaalt

Prof. dr. D. (Dion) Gijswijt
Technische Universiteit Delft

Alice neemt een eindige ongerichte graaf $G = (V, E)$ en kleurt daarvan elke knoop zwart of wit. Bob verandert de kleuring: elke knoop krijgt de kleur die in de kleuring van Alice het vaakst voorkomt onder zijn buren (bij gelijke aantallen verandert de kleur van de knoop niet). Vervolgens verandert Alice de kleuring volgens hetzelfde recept: elke knoop krijgt de kleur die in de kleuring van Bob het vaakst voorkomt onder zijn buren (bij gelijke aantallen verandert de kleur van de knoop niet). Zo blijven Alice en Bob afwisselend de kleuring van G aanpassen. Zie de figuur voor een voorbeeld.
Bewijs (voor elke G en elke beginkleuring) dat na een aantal stappen de kleuring van Alice niet meer verandert t.o.v. haar vorige kleuring.



Uitwerking.
We modelleren de kleuring na t stappen met de functie $f_t : V \to \{-1, 1\}$ (zwart is -1 en wit is 1), waarbij f_0 de kleuring aan het begin is.
Voor $t \geq 1$ definiëren we

$$E_t = \sum_{u \in V} \sum_{w \in N(u)} f_t(u) f_{t-1}(w).$$

Voor $t \geq 2$ vinden we dan

$$E_t - E_{t-1} = \sum_{u \in V} (f_t(u) - f_{t-2}(u)) \sum_{w \in N(u)} f_{t-1}(w)$$

Merk op dat elke bijdrage $(f_t(u) - f_{t-2}(u)) \sum_{w \in N(u)} f_{t-1}(w)$ niet-negatief is en positief als geldt: $f_t(u) \neq f_{t-2}(u)$ en $\sum_{w \in N(u)} f_{t-1}(w) \neq 0$. In het bijzonder geldt:

$$E_t > E_{t-1} \text{ als } f_{t-2}(u) = f_{t-1}(u) \neq f_t(u) \text{ voor zekere } u \in V. \qquad (*)$$

Omdat E_t een geheel getal tussen $-2|E|$ en $2|E|$ is, kan situatie $(*)$ zich maar eindig vaak voordoen. Dit impliceert dat voor elke $u \in V$ er maar eindig veel waarden t zijn zo dat $f_{t-2}(u) \neq f_t(u)$.

13. Positieve inverses

Prof. dr. A. (Alexander) Schrijver
Centrum voor Wiskunde en Informatica

Laat M een vierkante matrix met reële coëfficiënten zodanig dat in elke rij de coëfficiënten sommeren tot 1. Bewijs dat M een principiële submatrix heeft die een niet-negatieve inverse heeft[3].

Uitwerking.
Merk op dat $Mx > 0$ een oplossing met $x \geq 0$ heeft (namelijk x is de vector met enkel 1-en). Uit alle principiële submatrices A van M voor welke $Ax > 0$ een oplossing heeft met $x \geq 0$, kies er eentje met minimale grootte. We laten zien dat A een niet-negatieve inverse heeft. Laat A grootte n hebben, en laat P de verzameling van positieve vectoren in $\mathbb{R}^n$. Dan hebben we:

$$\forall b \in P, \exists x \in P \text{ such that } Ax = b. \tag{13.1}$$

Om dit te bewijzen bekijken we het polyhedron

$$Q := \{x \geq 0 \mid Ax \geq b\}.$$

Doordat A minimaal is geldt:

$$x > 0 \forall x \in Q, \tag{13.2}$$

Stel namelijk dat $x_1 = 0$, dan kunnen we de eerste rij en eerste kolom van A weghalen, en krijgen we een kleinere matrix A' die voldoet aan $A'x' \geq b', x' \geq 0$. Hier komen x', b' van x, b door het eerste coordinaat weg te halen. Merk op dat A' niet uit enkel nullen bestaat aangezien $x \neq 0$. Dit is in tegenspraak met het feit dat A minimaal is, dus hebben we (2) bewezen.

Aangezien $Ax > 0$ voor een $x \geq 0$, weten we dat $Q \neq \emptyset$ (aangezien $A(\lambda x) = \lambda Ax \geq b$ voor λ groot genoeg). Dus Q heeft een vertex, zeg v. Dan hebben we dat op zijn minst n van de ongelijkheden $x \geq 0, Ax \geq b$ worden voldaan op v met gelijkheid. Als $v > 0$ hebben we $Av = b$ wat (1) bewijst.

Dus $P \subseteq AP$. In het bijzonder, aangezien P maximale dimensie heeft, is A niet singulier. Dus $\overline{P} \subseteq \overline{AP} = A\overline{P}$. Dit volgt doordat A een homeomorfisme is, want A is niet singulier. Dus geldt $A^{-1}\overline{P} \subseteq \overline{P}$. Aangezien $\overline{P}$ een set niet-negatieve vectoren is, hebben we dat A^{-1} niet negatief is.

[3]Een principiële submatrix is een submatrix waar de indices van de overgebleven rijen hetzelfde zijn als de indices van de overgebleven kolommen, niet negatief betekent dat alle coefficienten van de matrix niet negatief zijn

Crack the code

13532057

332807 178208206 1511191 84356460617 299 20301227 1810358
313962 aaaccc 49344361 35563 2311820137 299 332807 6856967
996473518293 614712075356825080426 608399 989 14839 2806
45433063754 20301227 93497093 acc 49344361 35563 52131695

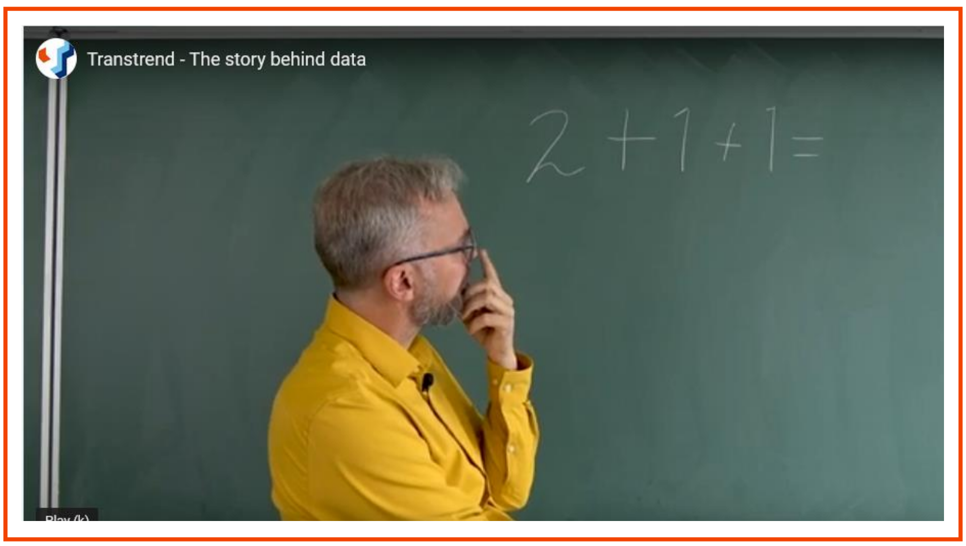
332807 178208206 1511191 9310186 299 20301227 2678207712468409
21529682515 bbc 1439568097 3337 231287 1633 299 332807 4045337
aa 116692587470 3337 86735 aaaac 7064094873146 56560603 1358
3337 86735 1633 67252 1238666 332807 33022 4573545608786 1633

332807 178208206 1511191 0123456789 299 332807 9394 608399
989 1282836161204411 299 332807 2945436432455 20819117 1032971504246 3337
1696781075 14839 2191657476063 3337 14839 11973866 3337 27522212277367367
14839 1154958430385193 1528111 14839 19505 332807 4443145 33
2 26298542

Harold de Boer

Hint: aaaccc = 1000

Heb je de code gekraakt, stuur dan je antwoord naar: hr@transtrend.com



“Bij Transtrend ontwikkelen vindingrijke bèta's systematische handelsstrategieën waarmee het vermogen van professionele beleggers wordt beheerd.”